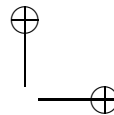


ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

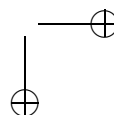
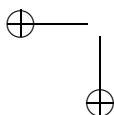


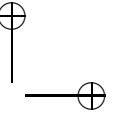
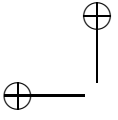
Δυναμική ρητών επαναληπτικών μεθόδων και μορφοκλασματικές
συναρτήσεις: Αλγοριθμική κατασκευή και γραφική
αναπαράστασή τους με υπολογιστή

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

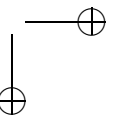
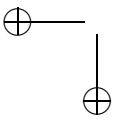
Βασίλειος Π. Δρακόπουλος

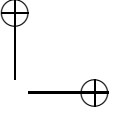
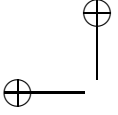
ΑΘΗΝΑΙ 1998



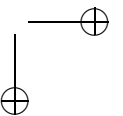
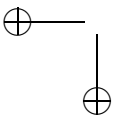


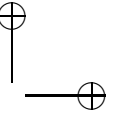
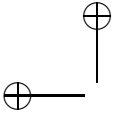
2



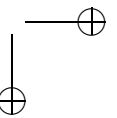
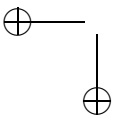


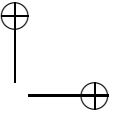
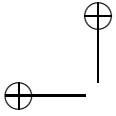
Του αείμνηστου φίλου, συνεργάτη
και καθηγητή μου, Αλ. Μπεμ.
Αφιερώνεται επίσης σε όλους αυτούς
που αγαπώ.





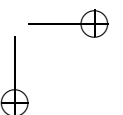
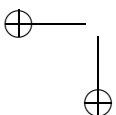
ii

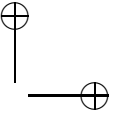
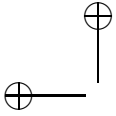




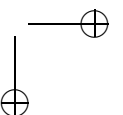
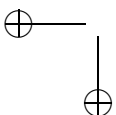
Περιεχόμενα

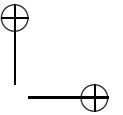
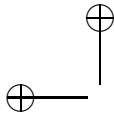
Πρόλογος	xv
Περίληψη	xix
Summary	xxi
Εισαγωγή	1
1 Χρήσιμες έννοιες μιγαδικής ανάλυσης	9
1.1 Προκαταρκτικά	9
1.2 Η στερεογραφική προβολή	11
1.3 Σύγκλιση ολόμορφων συναρτήσεων	13
1.4 Δυναμικά συστήματα και ρητές απεικονίσεις	15
1.5 Φυσιολογικές οικογένειες και ισοσυνέχεια	17
2 Τα σύνολα Julia και Fatou	23
2.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες	23
2.2 Πλήρως αναλλοίωτα σύνολα	27
2.3 Εξαιρετικά σημεία	29
2.4 Τα σύνολα Julia και τα περιοδικά σημεία	33
2.5 Συζυγίες αναλυτικών συναρτήσεων στη σφαίρα Riemann	37
2.5.1 Η ελκυστική/απωστική περίπτωση	37
2.5.2 Η υπερελκυστική περίπτωση	38
2.5.3 Η ουδέτερη περίπτωση	38
2.6 Ταξινόμηση κατά Sullivan των συνόλων Fatou	39
3 Κρίσιμα σημεία	41
3.1 Φυσιολογικότητα των αντιστρόφων απεικονίσεων	41
3.2 Κρίσιμα σημεία και περιοδικοί τόποι	42
3.3 Μονοπαραμετρικές οικογένειες	43
3.4 Σύνολα Julia δευτεροβαθμίων πολυωνύμων	45



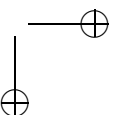
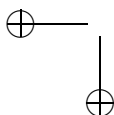


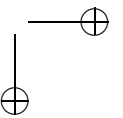
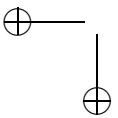
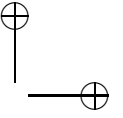
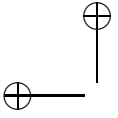
3.5	Το σύνολο Mandelbrot	46
3.6	Χάος	48
4	Επαναληπτικές μέθοδοι	53
4.1	Η μέθοδος Newton για δευτεροβάθμια πολυώνυμα	54
4.2	Επαναληπτική μέθοδος Schröder	56
4.2.1	Κατασκευή των συναρτήσεων Schröder	56
4.2.2	Ανακατασκευή των συναρτήσεων Schröder	58
4.2.3	Υπολογιστικές τεχνικές	59
4.2.4	Πρόσθετα σταθερά σημεία	61
4.2.5	Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί των πολυωνύμων $f_n(z) = z^n - 1$, συναρτήσεων Schröder και οι λεκάνες έλξης των n -οστών ριζών της μονάδας	62
4.2.6	Η μέθοδος Schröder στον παραμετρικό χώρο	68
4.2.7	Λεκάνες έλξης σχετιζόμενες με παθολογικούς ελκυστικούς κύκλους	78
4.2.8	Η περίπτωση των τεταρτοβαθμίων πολυωνύμων	83
4.3	Επαναληπτική μέθοδος König	86
4.3.1	Κατασκευή των συναρτήσεων König	87
4.3.2	Ανακατασκευή των συναρτήσεων König	88
4.3.3	Πρόσθετα σταθερά σημεία της μεθόδου König	89
4.3.4	Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί των πολυωνύμων $f_n(z) = z^n - 1$, συναρτήσεων König και οι λεκάνες έλξης των n -οστών ριζών της μονάδας	90
4.3.5	Η μέθοδος König στον παραμετρικό χώρο	94
4.3.6	Λεκάνες έλξης σχετιζόμενες με παθολογικούς ελκυστικούς κύκλους	97
4.4	Επαναληπτική μέθοδος Laguerre	100
4.4.1	Κατασκευή της συνάρτησης Laguerre	101
4.4.2	Ανακατασκευή της συνάρτησης Laguerre	103
4.4.3	Η μέθοδος Laguerre σε παραμετρικούς χώρους	104
4.4.4	Σύνολα Julia της, εφαρμοζόμενης στα πολυώνυμα $f_n(z) = z^n - 1$, συνάρτησης Laguerre και οι λεκάνες έλξης των n -οστών ριζών της μονάδας	104
4.5	Συμπεράσματα	106
5	Μορφοκλασματικές συναρτήσεις και παρεμβολή	109
5.1	Επαναλαμβανόμενα συστήματα συναρτήσεων	110
5.2	Μορφοκλασματικές συναρτήσεις παρεμβολής	112
5.3	Συγγενείς μορφοκλασματικές συναρτήσεις παρεμβολής	117
5.4	Μορφοκλασματική παρεμβολή με χρήση κρυφής μεταβλητής	122

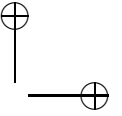
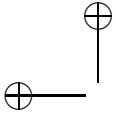




5.5	Πολικές μορφοκλασματικές συναρτήσεις παρεμβολής	126
6	Καμπύλες γεμίζουσες τον χώρο	131
6.1	Καμπύλες προερχόμενες από ΣΜΣΠ	131
6.2	Καμπύλες προερχόμενες από κρυφής μεταβλητής ΣΜΣΠ	134
7	Αλγόριθμοι κατασκευής μορφοκλασματικών συνόλων	141
7.1	Κατασκευή των ΕΣΣ	141
7.2	Κατασκευή των συνόλων Julia	143
7.3	Κατασκευή των συνόλων τύπου Mandelbrot	147
7.4	Ο κόσμος είναι στρογγυλός, όχι επίπεδος	149
7.4.1	Κυβικά πολυώνυμα	150
7.4.2	Τεταρτοβάθμια πολυώνυμα	151
7.5	Συζήτηση	152
A'	Κυβικές και τεταρτοβάθμιες εξισώσεις	155
A'.1	Επίλυση κυβικών εξισώσεων	155
A'.1.1	Τύποι του Cardan	155
A'.1.2	Τριγωνομετρική επίλυση	156
A'.2	Επίλυση τεταρτοβαθμίων εξισώσεων	157
A'.2.1	Επίλυση κατά Descartes–Euler	157
A'.2.2	Επίλυση κατά Ferrari	158
	Βιβλιογραφία	159
	Ευρετήριο	172

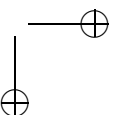
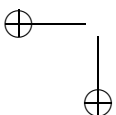




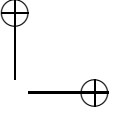
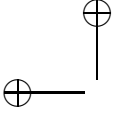


Κατάλογος Σχημάτων

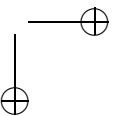
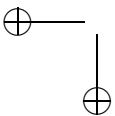
1	Επιστροφή στα θρανία!	xxii
2	Η καμπύλη Hilbert (α) στις δύο και (β) στις τρεις διαστάσεις.	2
3	(α) Ένα δένδρο και (β) ένα φύλλο φτέρης.	3
4	Η καμπύλη Hénon (μορφοκλασματική διάσταση 1.26).	4
1.1	Ολόμορφη απεικόνιση με τοπική αντίστροφη κοντά σ' ένα σημείο z_0	11
1.2	Η στερεογραφική προβολή.	12
2.1	Ομοιόμορφη σύγκλιση της (p^{n_i}) μέσα στο D	29
2.2	Επιλογή του ανοικτού συνόλου V , ώστε να μην τέμνεται με το $p^{-1}(V)$. 35	
2.3	Το $A(a)$ είναι ανοικτό σύνολο.	36
4.1	Μετασχηματισμός των λεκανών έλξης και του συνόλου Julia της $M(w) = w^2$ (δεξιά), πίσω στο αρχικό επίπεδο των z (αριστερά).	56
4.2	Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί του $f_2(z) = z^2 - 1$, συναρτήσεων Schröder στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος S_2 , (β) μέθοδος S_3 , (γ) μέθοδος S_4	62
4.3	Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί του $f_3(z) = z^3 - 1$, συναρτήσεων Schröder στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος S_2 , (β) μέθοδος S_3 , (γ) μέθοδος S_4	63
4.4	Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί του $f_4(z) = z^4 - 1$, συναρτήσεων Schröder στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος S_2 , (β) μέθοδος S_3 , (γ) μέθοδος S_4	63
4.5	Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_2(z) = z^2 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος S_2 , (β) μέθοδος S_3 , (γ) μέθοδος S_4	64
4.6	Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_2(z) = z^2 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος S_5 , (β) μέθοδος S_6 , (γ) μέθοδος S_7	64
4.7	Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_3(z) = z^3 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος S_2 , (β) μέθοδος S_3 , (γ) μέθοδος S_4	65

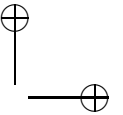
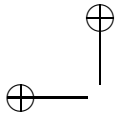


- 4.8 Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_3(z) = z^3 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) μέθοδος S_5 , (β) μέθοδος S_6 , (γ) μέθοδος S_7 . . . 65
- 4.9 Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_4(z) = z^4 - 1$ στη μιγαδική περιοχή $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) μέθοδος S_2 , (β) μέθοδος S_3 , (γ) μέθοδος S_4 . . . 66
- 4.10 Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_4(z) = z^4 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) μέθοδος S_5 , (β) μέθοδος S_6 , (γ) μέθοδος S_7 . . . 66
- 4.11 (α) Επαναληπτική εφαρμογή της S_2 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ . (β) Το μιγαδικό παραμετρικό χωρίο $[0.35, 0.37] \times [-0.01, 0.01]$ του Σχήματος (α) αποκαλύπτει ένα σύνολο Mandelbrot για την S_2 . . . 71
- 4.12 (α) Επαναληπτική εφαρμογή της S_3 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ . (β) Το μιγαδικό παραμετρικό χωρίο $[1.89, 1.95] \times [-0.03, 0.03]$ του Σχήματος (α) αποκαλύπτει ένα σύνολο Mandelbrot για την S_3 . . . 72
- 4.13 (α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της S_4 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ . (γ) Το μιγαδικό παραμετρικό χωρίο $[3.07, 3.17] \times [-0.05, 0.05]$ του Σχήματος (α) αποκαλύπτει ένα σύνολο Mandelbrot για την S_4 73
- 4.14 (α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της S_5 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ . (γ) Το μιγαδικό παραμετρικό χωρίο $[4.09, 4.21] \times [-0.06, 0.06]$ του Σχήματος (α) αποκαλύπτει ένα σύνολο Mandelbrot για την S_5 73
- 4.15 Επαναληπτική εφαρμογή της S_6 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ 74
- 4.16 Επαναληπτική εφαρμογή της S_7 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ 75
- 4.17 Επαναληπτική εφαρμογή της S_8 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ 75
- 4.18 Επαναληπτική εφαρμογή της S_8 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ 76
- 4.19 Επαναληπτική εφαρμογή της S_9 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ 76
- 4.20 Επαναληπτική εφαρμογή της S_9 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ 77
- 4.21 Επαναληπτική εφαρμογή της S_{10} στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ 77
- 4.22 Επαναληπτική εφαρμογή της S_{10} στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ 78
- 4.23 (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για την S_2 , όπου $\lambda = 0.37$ και $\lambda = 0.36$, αντιστοίχως. (γ) Το χωρίο $[-0.15, 0.15] \times [-0.15, 0.15]$ του Σχήματος (β) περιέχει μία από τις λεκάνες έλξης του κύκλου μήκους δύο. 79
- 4.24 (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για την S_3 , όπου $\lambda = 1.96$ και $\lambda = 1.93$, αντιστοίχως. 80
- 4.25 (α), (β) Τα χωρία $[-1, 1] \times [-1, 1]$ και $[0.1, 0.4] \times [-0.15, 0.15]$ του Σχήματος 4.21(β), αντιστοίχως, υποδεικνύουν τη θέση των ξ_i και περιέχουν την άμεση λεκάνη έλξης της ανεπιθύμητης ρίζας ξ_1 80

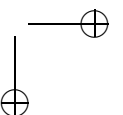
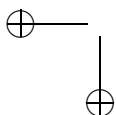


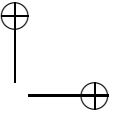
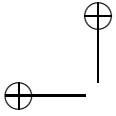
- 4.26 (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για την S_4 , όπου $\lambda = 3.17$ και $\lambda = 3.14$, αντιστοίχως. 81
- 4.27 (α), (β) Τα χωρία $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$ και $[-0.15, 0.15] \times [-0.15, 0.15]$ του Σχήματος 4.23(β), αντιστοίχως, υποδεικνύουν τη θέση των τ_i και περιέχουν την άμεση λεκάνη έλξης της ανεπιθύμητης ρίζας τ_1 81
- 4.28 (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για τη μέθοδο S_5 , όπου $\lambda = 4.3$ και $\lambda = 4.15$, αντιστοίχως. (γ) Το χωρίο $[-0.4, -0.1] \times [-0.15, 0.15]$ του Σχήματος (β) περιέχει την άμεση λεκάνη έλξης της ελκυστικής ανεπιθύμητης ρίζας. 82
- 4.29 Γεωμετρική αναπαράσταση των ριζών των εξισώσεων $q_c(z) = 0$ και $q_\lambda(z) = 0$, αντιστοίχως. 83
- 4.30 (α) Επαναληπτική εφαρμογή της S_2 στην οικογένεια των πολυωνύμων q_λ . (β), (γ) Τα χωρία $[4, 9] \times [-2.5, 2.5]$ και $[0.115, 0.215] \times [-0.05, 0.05]$ του Σχήματος (α), αντιστοίχως, εμφανίζουν σύνολα τύπου Mandelbrot για την S_2 86
- 4.31 (α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της S_3 στην οικογένεια των πολυωνύμων q_λ . (γ) Το μιγαδικό χωρίο $[4.5, 6.5] \times [3, 5]$ του Σχήματος (α) αποκαλύπτει ένα σύνολο τύπου Mandelbrot για την S_3 86
- 4.32 (α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της S_4 στην οικογένεια των πολυωνύμων q_λ . (γ) Το μιγαδικό χωρίο $[3.5, 5.5] \times [4, 6]$ του Σχήματος (β) αποκαλύπτει ένα σύνολο τύπου Mandelbrot για την S_4 87
- 4.33 Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί του $f_3(z) = z^3 - 1$, συναρτήσεων König στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) μέθοδος K_3 , (β) μέθοδος K_4 , (γ) μέθοδος K_5 91
- 4.34 Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί του $f_4(z) = z^4 - 1$, συναρτήσεων König στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) μέθοδος K_3 , (β) μέθοδος K_4 , (γ) μέθοδος K_5 91
- 4.35 Λεκάνες έλξης των ριζών της $f_3(z) = z^3 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) μέθοδος K_3 , (β) μέθοδος K_4 , (γ) μέθοδος K_5 92
- 4.36 Λεκάνες έλξης των ριζών της $f_4(z) = z^4 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) μέθοδος K_3 , (β) μέθοδος K_4 , (γ) μέθοδος K_5 93
- 4.37 (α) Επαναληπτική εφαρμογή της K_3 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ . (β), (γ) Τα παραμετρικά χωρία $[1.47, 1.51] \times [-0.02, 0.02]$ και $[1.95, 2.05] \times [-3.35, -3.25]$, αντιστοίχως, του Σχήματος (α) αποκαλύπτουν σύνολα τύπου Mandelbrot για την K_3 96
- 4.38 Επαναληπτική εφαρμογή της K_4 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ 97
- 4.39 Μεγεθύνσεις των προηγούμενων Σχημάτων (α) και (β), αντιστοίχως, αποκαλύπτουν σύνολα Mandelbrot για την K_4 97



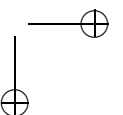
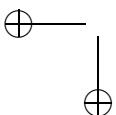


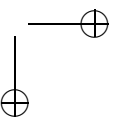
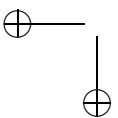
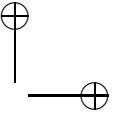
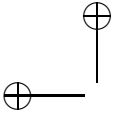
- 4.40 (α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της K_5 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ . (γ) Το μιγαδικό παραμετρικό χωρίο $[-3.3038, -3.3016] \times [-1.0784, -1.0762]$ του Σχήματος (α) αποκαλύπτει ένα σύνολο Mandelbrot για την K_5 98
- 4.41 (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για την K_3 , όπου $\lambda = 1.51$ και $\lambda = 1.492$, αντιστοίχως. (γ) Το χωρίο $[-0.4, -0.2] \times [-0.1, 0.1]$ του Σχήματος (β) περιέχει μία από τις λεκάνες έλξης του ανεπιθύμητου κύκλου. 99
- 4.42 (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για την K_4 , όπου $\lambda = 3.34$ και $\lambda = 3.33$ αντιστοίχως. (γ) Το χωρίο $[-1, -0.8] \times [-0.1, 0.1]$ του Σχήματος (β) περιέχει μία από τις λεκάνες έλξης του ανεπιθύμητου κύκλου. 100
- 4.43 (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για την K_5 , όπου $\lambda = -3.303 - 1.079i$ και $\lambda = -3.303 - 1.0776i$, αντιστοίχως. (γ) Το χωρίο $[-0.122, -0.022] \times [2, 2.1]$ του Σχήματος (β) περιέχει μία από τις λεκάνες έλξης του ανεπιθύμητου κύκλου. 100
- 4.44 Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_n(z) = z^n - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Laguerre: (α) $n = 2$, (β) $n = 3$, (γ) $n = 4$ 105
- 4.45 Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_n(z) = z^n - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Laguerre: (α) $n = 5$, (β) $n = 6$, (γ) $n = 7$ 105
- 4.46 Σύνολα Julia της, εφαρμοζόμενης επί των $f_n(z) = z^n - 1$, συνάρτησης Laguerre στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) $n = 2$, (β) $n = 3$, (γ) $n = 4$ 106
- 4.47 Σύνολα Julia της, εφαρμοζόμενης επί των $f_n(z) = z^n - 1$, συνάρτησης Laguerre στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) $n = 5$, (β) $n = 6$, (γ) $n = 7$ 106
- 5.1 Η γραφική παράσταση μιας ΣΜΣΠ. 119
- 5.2 Η γραφική παράσταση μιας ΣΜΣΠ. 120
- 5.3 Η γραφική παράσταση μιας φραγμένης ΣΜΣΠ. 122
- 5.4 Η γραφική παράσταση μιας φραγμένης ΣΜΣΠ. 123
- 5.5 Δύο ορθογώνιες προβολές του διαγράμματος μιας ΣΜΣΠΚΜ. . . . 125
- 5.6 Ορθογώνια και Cabinet προβολή του διαγράμματος μιας ΣΜΣΠΚΜ. 126
- 5.7 Η γραφική παράσταση μιας ΠΜΣΠ. 128
- 5.8 Η γραφική παράσταση μιας ΠΜΣΠ σε πολικές συντεταγμένες. . . . 129
- 6.1 Μια ακολουθία συνόλων «συγκλίνουσα προς» μία γεμίζουσα τον χώρο καμπύλη. 133

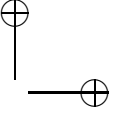
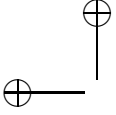




6.2	Μια ακολουθία συνόλων «συγκλίνουσα προς» μία γεμίζουσα τον χώρο καμπύλη.	134
6.3	Μια ακολουθία συνόλων «συγκλίνουσα προς» μία γεμίζουσα τον χώρο καμπύλη.	135
6.4	Μια ακολουθία καμπύλων Hilbert.	136
6.5	Δύο ορθογώνιες προβολές του ελκυστή για το ΕΣΣ του Παραδείγματος 6.2.1.	136
6.6	Cabinet και ορθογώνια προβολή του ελκυστή για το ΕΣΣ του Παραδείγματος 6.2.1.	137
6.7	Δύο ορθογώνιες προβολές του ελκυστή για το ΕΣΣ του Παραδείγματος 6.2.2.	137
6.8	Cabinet και ορθογώνια προβολή του ελκυστή για το ΕΣΣ του Παραδείγματος 6.2.2.	138
6.9	Δύο ορθογώνιες προβολές του ελκυστή για το ΕΣΣ του Παραδείγματος 6.2.3.	138
6.10	Cabinet και ορθογώνια προβολή του ελκυστή για το ΕΣΣ του Παραδείγματος 6.2.3.	139
7.1	Το ίδιο σύνολο Julia χρησιμοποιώντας (α) την MAE και (β) την TMEA.	144
7.2	(α) Ένα σύνολο Julia και (β) το σύνολο Mandelbrot χρησιμοποιώντας τη ΜΣΣ.	145
7.3	(α) Ένα σύνολο Julia και (β) το σύνολο Mandelbrot χρησιμοποιώντας την ΜΣΔ.	147
7.4	(α) Ένα σύνολο Julia και (β) το σύνολο Mandelbrot χρησιμοποιώντας την MEA.	149
7.5	Επαναληπτική εφαρμογή (α) της S_2 και (β) της S_3 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ	150
7.6	Μεγεθύνσεις των προηγούμενων σχημάτων αποκαλύπτουν σύνολα Mandelbrot για τις S_2 και S_3 , αντιστοίχως.	151
7.7	(α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της S_4 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ . (γ) Μεγέθυνση μιας περιοχής του Σχήματος (β) αποκαλύπτει ένα σύνολο Mandelbrot για την S_4	151
7.8	Επαναληπτική εφαρμογή (α) της S_2 και (β) της S_3 στην οικογένεια των πολυωνύμων q_λ	152
7.9	(α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της S_4 στην οικογένεια των πολυωνύμων q_λ	152
7.10	Ένα μορφοκλασματικό τοπίο.	153
7.11	Ένα μορφοκλασματικό τοπίο.	154

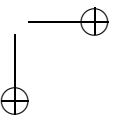
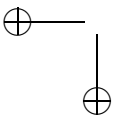


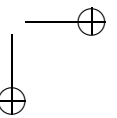
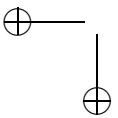
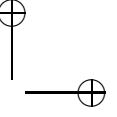
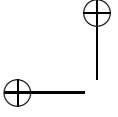


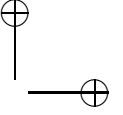
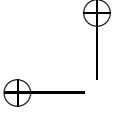


Κατάλογος Πινάκων

5.1	Ο κώδικας του ΕΣΣ για τη ΣΜΣΠΚΜ που κατασκευάστηκε στο Παράδειγμα 5.4.1.	125
6.1	Ο κώδικας του ΕΣΣ για τις γεμίζουσες τον χώρο καμπύλες που κατασκευάστηκαν (α) στο Παράδειγμα 6.1.1 και (β) στο Παράδειγμα 6.1.2.	132
6.2	Ο κώδικας του ΕΣΣ για τις γεμίζουσες τον χώρο καμπύλες που κατασκευάστηκαν (α) στο Παράδειγμα 6.2.1 και (β) στο Παράδειγμα 6.2.2.	135
6.3	Ο κώδικας του ΕΣΣ για τη γεμίζουσα τον χώρο καμπύλη που κατασκευάστηκε στο Παράδειγμα 6.2.3.	138







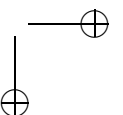
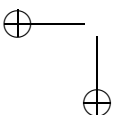
Πρόλογος

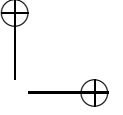
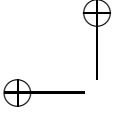
Η επιγραφή της διατριβής περιέχει δύο βασικές έννοιες: Τη δυναμική ρητών επαναληπτικών μεθόδων και τις μορφοκλασματικές συναρτήσεις. Επίσης περιέχει δύο βασικά εργαλεία για την οπτική αναπαράστασή τους: Τους αλγορίθμους και τα γραφικά ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Η διατριβή χωρίζεται θεματικώς σε δύο μέρη, εντός των οποίων κατανέμονται ισομερώς η θεωρία και οι εφαρμογές. Στην αρχή του πρώτου μέρους αναφέρουμε όλες τις προαπαιτούμενες έννοιες για την ανάπτυξη και θεμελίωση των επόμενων κεφαλαίων και παρουσιάζουμε τη θεωρία των G. Julia και P. Fatou, η οποία αποτελεί τη βάση της μιγαδικής αναλυτικής δυναμικής, ξεκινώντας από τις συνέπειες του Θεωρήματος Montel μέχρι την πρόσφατη ανακάλυψη του συνόλου Mandelbrot. Στη συνέχεια μελετούμε τις δυναμικές ιδιότητες των επαναληπτικών μεθόδων Schröder, König και Laguerre. Οι επαναληπτικές μέθοδοι δεν είναι τίποτε άλλο από κάποιες συναρτήσεις, ειδικά επιλεγμένες, ώστε επαναλαμβανόμενες να μας οδηγήσουν στις ρίζες κάποιας εξίσωσης. Εάν πρόκειται για πολυωνυμική εξίσωση, τότε οι επαναληπτικές αυτές μέθοδοι είναι συνήθως ρητές συναρτήσεις. Στο δεύτερο μέρος της διατριβής μελετούμε τις μορφοκλασματικές συναρτήσεις παρεμβολής, οι οποίες αποτελούν έναν καινούργιο τρόπο προσαρμογής πειραματικών δεδομένων και οι γραφικές παραστάσεις τους χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση φυσικών τοπίων με ηλεκτρονικό υπολογιστή, όπως συννέφων, οροσειρών, δένδρων και άλλων.

Μετά τον θάνατο του αλησμόνητου επιβλέποντά μου Αλ. Μπεμ, η επιστημονική μου καθοδήγηση βάρυνε περισσότερο τη Λ. Ευαγγελάτου—Δάλλα, Αναπληρωτή Καθηγήτρια στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών. Κανείς μας δεν περίμενε πόσο μακριά θα έφθανε εκείνη η ερευνητική τριάδα που δειλά δειλά ξεκίνησε να κολυμπάει στις αρχές της δεκαετίας του '90 σε, άγνωστα γι' αυτήν, βαθιά νερά. Τόσο η επιστημονική όσο και η ηθική συμπαράσταση της Λεώνης καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής ήταν αμέριστη.

Ο Θεοχ. Θεοχάρης, Επίκουρος Καθηγητής του τμήματος, ήταν εκείνος που ανέλαβε ως επιβλέπων τους τελευταίους επτά μήνες. Η συμβολή του ήταν κάθε άλλο παρά μια διαδικαστική διεκπεραίωση. Η μελέτη μιας σχεδόν τελειωμένης διατριβής είναι αρκετά επίπονη δοκιμασία και ο Χάρης αφιέρωσε γι' αυτήν αρκετό από τον πολύτιμο χρόνο του.





Τα Θερινά Σχολεία και Πανελλήνια Συνέδρια μη γραμμικής δυναμικής αποτελούν έναν χώρο επικοινωνίας μεταξύ των επιστημόνων που ασχολούνται με θέματα χάους και πολυπλοκότητας. Το καλοκαίρι του 1993 γνώρισα την «ψυχή» αυτών των συνεδρίων, τον Ανασ. Μπούντη, Καθηγητή στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών και εντυπωσιάσθηκα αμέσως από την εγχαρδιότητα με την οποία περιβάλλει τους νέους ερευνητές. Από τότε η ερευνητική ομάδα μας συμμετάσχει και στηρίζει αυτόν τον πρωτοποριακό, για τη χώρα μας, θεσμό δημοσιοποιώντας τον σε όλες τις επιστημονικές εκδηλώσεις που μετέχει. Οι υποδείξεις και οι διορθώσεις του Τάσου ήταν κάτι παραπάνω από πολύτιμες.

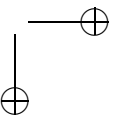
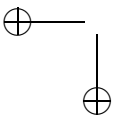
Τα πανελλήνια αυτά συνέδρια θα φάνταζαν όμως φτωχά δίχως την εξέχουσα προσωπικότητα του Ι. Νίκολη, Καθηγητή στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Πατρών. Δεν είναι τυχαίο που ο τελευταίος τόμος των πρακτικών των συνεδρίων αφιερώνεται εξ' ολοκλήρου σ' αυτόν για να μας θυμίζει το σπουδαίο επιστημονικό και συγγραφικό του έργο. Η ένθερμη υποστήριξη της ερευνητικής εργασίας μου από τον Γιάννη Νίκολη ήταν κάτι το συγκλονιστικό για εμένα.

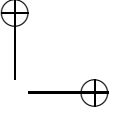
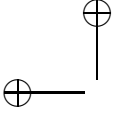
Το πρώτο πανεπιστημιακό μάθημα πάνω στους Η/Υ το διδάχθηκα από τον Γ. Καραμπατζό, Καθηγητή στο Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο. Η οργανωμένη και συγκροτημένη σκέψη του καθώς και η άνεση στη διδασκαλία τον έκαναν αμέσως δημοφιλή σ' όλους τους πρωτοετείς φοιτητές. Η εμπιστοσύνη που μου έδειξε όλα αυτά τα χρόνια είναι πολύ σημαντική.

Με τον Ν. Μισυρλή, Καθηγητή του τμήματος, γνωριζόμαστε από το 1991 όταν ήμουν μεταπτυχιακός φοιτητής. Είναι από τους λίγους καθηγητές μου, ο οποίος έχει παρακολουθήσει την πορεία από τα φοιτητικά μου χρόνια μέχρι σήμερα. Οι εύστοχες παρατηρήσεις του με βοήθησαν πολύ στη βελτίωση της διατριβής.

Με τον Στερ. Θεοδωρίδη, Καθηγητή του τμήματος, συναντηθήκαμε την εποχή κατά την οποία τελείωνε το βιβλίο του για λογαριασμό του εκδοτικού οίκου Academic Press ζητώντας να ρίξουμε μια ματιά στην ενότητα με τα fractals. Το ενδιαφέρον και η παρουσία του ως μέλος της επταμελούς επιτροπής μου με τιμά ιδιαίτερα.

Για τη συγγραφή της διατριβής χρησιμοποιήθηκε το σύστημα επεξεργασίας κειμένου L^AT_EX. Ο Δρ. Α. Μπούκας με βοήθησε για την αρτιότερη εμφάνισή της. Τα σχήματα της εισαγωγής, εκτός του Σχήματος 1, παράχθηκαν μέσω του προγράμματος *Mathematica*TM χρησιμοποιώντας προγράμματα από το [38]. Για την αναπαραγωγή του Σχήματος 1 χρειασθήκαμε έναν HP Scanjet II C. Όλα τα υπόλοιπα σχήματα παράχθηκαν μέσω λογισμικού, το οποίο υλοποίησε ο συγγραφέας με τη βοήθεια των μεταπτυχιακών φοιτητών Ν. Αργυρόπουλου, Απ. Τζιοβάρια και Στ. Γεωργίου, εκτός των περιπτώσεων που αναφέρονται στο Κεφάλαιο 7. Οι υπολογιστές που χρησιμοποιήθηκαν ήταν: Microway 486/66, Mac el PII/233 και Axil 210. Η εκτύπωση του κειμένου έγινε σε έναν HP Laserjet III, ενώ τα έγχρωμα σχήματα

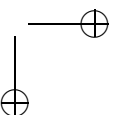
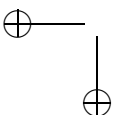


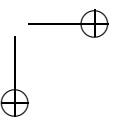
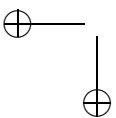
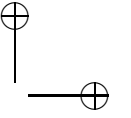
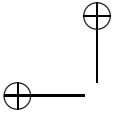


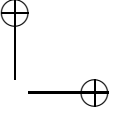
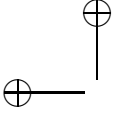
εκτυπώθηκαν από έναν Lexmark Optra SC 1275. Για τις βιβλιογραφικές συντιμήσεις ακολουθήσαμε το πρότυπο της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρείας που βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση www.ams.org/msnhtml/serials.pdf.

Αθήνα, Δεκέμβριος 1998

Βασίλειος Π. Δρακόπουλος



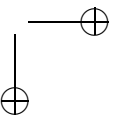
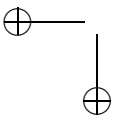


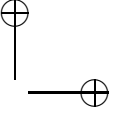
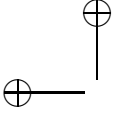


Περίληψη

Το αντικείμενο της διατριβής εντάσσεται στη γνωστική περιοχή των μορφοκλασματικών συνόλων (fractals) και της χαοτικής δυναμικής. Η κύρια συνεισφορά της συνίσταται από την κατασκευή και τη μελέτη μορφοκλασματικών συνόλων που προκύπτουν από (ρητές) επαναληπτικές μεθόδους, καθώς και μορφοκλασματικών απεικονίσεων και καμπύλων που προκύπτουν από επαναλαμβανόμενα συστήματα συναρτήσεων. Στόχος της είναι τόσο η θεωρητική μελέτη όσο και η γραφική αναπαράσταση μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή των προαναφερθέντων κατασκευών.

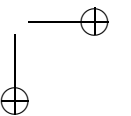
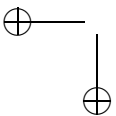
Στα τρία πρώτα κεφάλαια δίνουμε μια γενική εικόνα της υπάρχουσας θεωρίας των μιγαδικών αναλυτικών δυναμικών συστημάτων. Στο τέταρτο κεφάλαιο εξετάζουμε λεπτομερώς, τόσο σε δυναμικούς όσο και σε παραμετρικούς χώρους, τις επαναληπτικές μεθόδους Schröder, König και Laguerre. Αρχικώς εξετάζουμε τα σύνολα Julia των μεθόδων αυτών, οι οποίες κατασκευάστηκαν να συγκλίνουν προς τις n -οστές ρίζες της μονάδος και μελετούμε τις λεκάνες έλξης αυτών των ριζών. Επίσης δείχνουμε ότι τα σύνολα Julia της συνάρτησης Laguerre είναι μορφοκλασματικά μόνο για $n > 4$. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε μια νέα αλγοριθμική κατασκευή, ώστε να υπολογίζονται επαγωγικώς οι όροι των συναρτήσεων Schröder και König. Μεγιστοποιούμε την υπολογιστική απόδοση των συναρτήσεων Schröder που σχετίζονται με τη γενικότερη μονοπαραμετρική οικογένεια κυβικών πολυωνύμων παρουσιάζοντας μια νέα υπολογιστική τεχνική βασισμένη στην προαναφερθείσα αλγοριθμική κατασκευή. Επίσης, μελετούμε τη δυναμική των, εφαρμοζόμενων στη γενικότερη μονοπαραμετρική οικογένεια κυβικών πολυωνύμων, απεικονίσεων Schröder τάξης τρία έως δέκα και των απεικονίσεων König τάξης τρία έως πέντε, αφού επιλύσουμε πολυωνυμικές εξισώσεις υψηλού βαθμού για την εύρεση όλων των κρίσιμων σημείων των απεικονίσεων αυτών. Ως προς τη δυναμική της συνάρτησης Laguerre στο μιγαδικό πεδίο αποδεικνύουμε και επαληθεύουμε με τη χρήση γραφικών μεθόδων ότι δεν υπάρχουν ελκυστικοί κύκλοι, οι οποίοι παγιδεύουν μίαν επαναληπτική ακολουθία προερχόμενη από τη γενικότερη μονοπαραμετρική οικογένεια των κυβικών πολυωνύμων. Εκτός αυτών, διερευνούμε τις επιπτώσεις των πρόσθετων σταθερών σημείων των μεθόδων Schröder και König στη δυναμική των απεικονίσεων αυτών, καθώς και τις, σχετιζόμενες με παθολογικούς κύκλους, λεκάνες έλξης των σημείων αυτών. Επιπροσθέτως, μελετούμε τη δυναμική της μεθόδου Schröder σε μια γενικευμένη μονοπαραμετρική

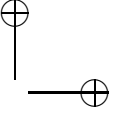
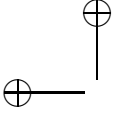




οικογένεια διτετράγωνων πολυωνύμων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο μελετούμε μορφοκλασματικές συναρτήσεις, οι οποίες χρησιμεύουν στην παρεμβολή, στη συμπίεση εικόνων και στην παραγωγή καμπύλων που γεμίζουν τον χώρο. Πρωτίστως, ασχολούμαστε με διδιάστατες και τριδιάστατες μορφοκλασματικές συναρτήσεις παρεμβολής τις οποίες χρησιμοποιούμε στο έκτο κεφάλαιο, για να κατασκευάσουμε καμπύλες που γεμίζουν τον χώρο. Οι καμπύλες αυτές προκύπτουν είτε ως ελκυστές ενός επαναλαμβανόμενου συστήματος συναρτήσεων είτε ως προβολές του διαγράμματος των συναρτήσεων αυτών. Επίσης, εισάγουμε καινούργιες μορφοκλασματικές συναρτήσεις παρεμβολής χρησιμοποιώντας μη γραμμικές τεχνικές, ενώ επιλύουμε, για τις δύο διαστάσεις, το πρόβλημα εξακρίβωσης των παραμέτρων, ώστε η μορφοκλασματική συμπίεση εικόνας να γίνεται με αυτόματο τρόπο, καθορίζοντας τα βέλτιστα φράγματα μέσα στα οποία πρέπει να βρίσκονται οι κατακόρυφοι παράγοντες κλιμάκωσης. Στο έβδομο και τελευταίο κεφάλαιο αναφερόμαστε σε διάφορους αλγορίθμους κατασκευής των μορφοκλασματικών συνόλων που παρουσιάσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια.



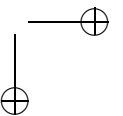
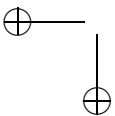


Summary

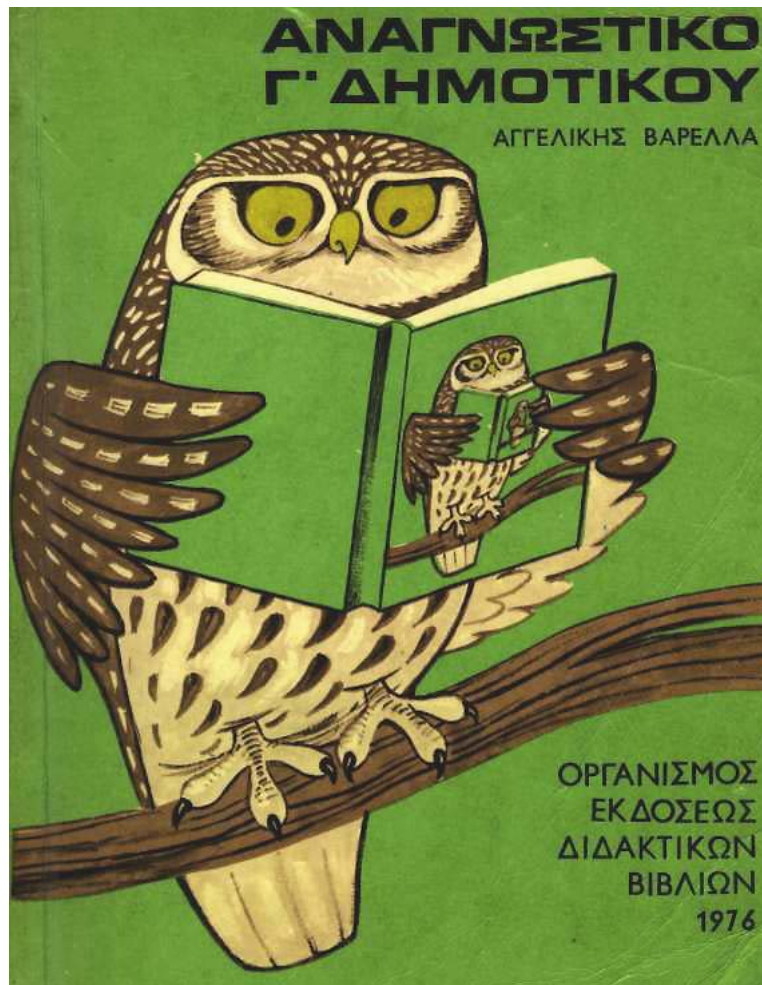
The subject of this dissertation belongs to the field of knowledge of Fractals and Chaotic Dynamics. Its main contribution is in the construction and study of fractal sets which appear mostly from rational iteration functions as well as of fractal mappings and curves which appear from iterated function systems. Its goal is both the theoretical study and the computer graphics representation of the above mentioned constructions.

In the first three chapters we simply present the existing theory of complex analytic dynamical systems. In the fourth chapter, we make a profounder study of Schröder, König and Laguerre iteration methods in both the dynamic and parameter spaces. We first examine the Julia sets of these methods which are constructed to converge to the n th roots of unity and, subsequently, these roots' basins of attraction. We also show that the Julia sets of the Laguerre function are fractals only for $n > 4$. Then, we present a new algorithmic construction to compute inductively all of the Schröder and König functions' terms; by the same construction we maximize the computational efficiency of these functions associated with a one-parameter family of cubic polynomials. We examine also the orbits of all free critical points of the Schröder and König functions as applied to the one-parameter family of cubic polynomials mentioned above. As far as the dynamics of the Laguerre function in the complex plane is concerned, we demonstrate and graphically verify the non-existence of attracting cycles which trap an iteration sequence associated with the one-parameter family of cubic polynomials. Additionally, we observe the behaviour of the attracting additional fixed points of Schröder and König maps which lead to pathological cycles, that is to points or cycles which do not correspond to the desired roots. Moreover, we study the dynamics of the Schröder method as applied to a generalized one-parameter family of biquadratic polynomials.

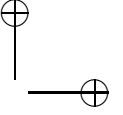
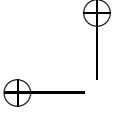
In the fifth chapter, we study fractal functions which are useful for interpolation purposes, for image compression and for the production of space-filling curves. Firstly, we are concerned with two and three-dimensional fractal interpolation functions that we use in the sixth chapter to construct some space-filling curves. These curves arise either as attractors of an iterated function system or



as the projection of their graphs. We determine the conditions that a vertical scaling factor must obey to model effectively an arbitrary function. We then introduce polar fractal interpolation functions as one fractal interpolation method of a non-affine character. Finally, we prove that this attractor has the same Hausdorff dimension as the polar one. In the seventh and final chapter we refer to several algorithms that construct the fractal sets presented in the previous chapters.



Σχήμα 1: Επιστροφή στα θρανία!



Εισαγωγή

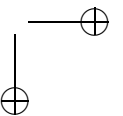
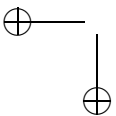
Όσα βουνά κι αν ανεβείτε,
απ' τις κορφές τους θ' αγναντεύτε άλλες κορφές,
ψηλότερες, μιαν άλλη πλάση ξελογιαστρα·
και στην κορφή σα φτάστε την κατάψηλη,
πάλε θα καταλάβετε πως βρίσκεστε
σαν πρώτα κάτω απ' όλα τ' άστρα.

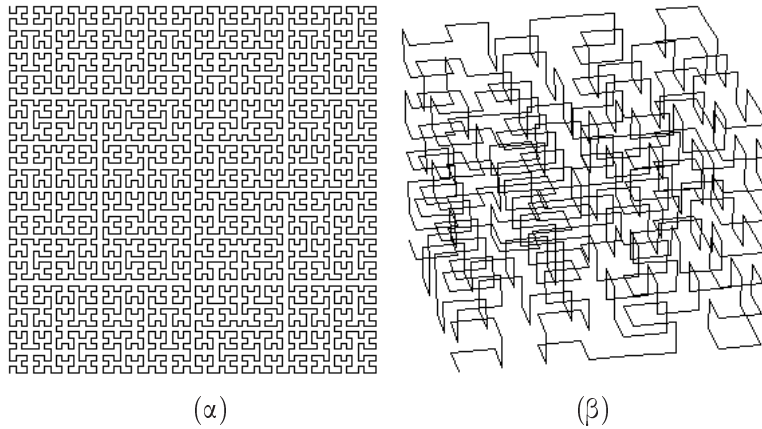
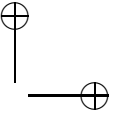
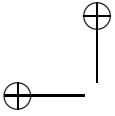
Κωστής Παλαμάς (Ο δωδεκάλογος του γύφτου)

Όσοι έχουν προσέξει κάποια παράξενα σχήματα, τα οποία ονομάζονται fractals και κοσμούν αφίσσες, κάρτες, δίσκους, περιοδικά και βιβλία, μιλούν για ωραίες εικόνες. Οι πιο προχωρημένοι πιστεύουν ότι πρόκειται περί αφηρημένης τέχνης προερχομένης από συγκεκριμένες εξισώσεις. Τι είναι όμως όλα αυτά τα πολύπλοκα σχήματα;

Σχεδιάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ένα κομμάτι χαρτιού. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία μας διδάσκει ότι αυτό είναι ένα σχήμα μίας διάστασης και συγκεκριμένα του μήκους. Τώρα επεκτείνετε το ευθύγραμμο τμήμα. Στρέψτε το γύρω γύρω, πίσω, εμπρός χωρίς να διασταυρώνονται οι γραμμές, μέχρις ότου γεμίσει όλο το χαρτί. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ισχυρίζεται ότι αυτό συνεχίζει να είναι γραμμή, δηλ. μια μονοδιάστατη εικόνα. Αλλά η διαίσθησή μας μας λέει ότι, αν η γραμμή γεμίσει πλήρως όλο το επίπεδο του χαρτιού μας, πρέπει να είναι διδιάστατη.

Κάπως έτσι ξεκίνησαν μια επανάσταση πριν από εκατό περίπου χρόνια μαθηματικοί, όπως οι Georg Cantor (1845–1918), Giuseppe Peano (1858–1932), David Hilbert (1862–1943), Felix Hausdorff (1868–1942), Helge von Koch (1870–1924) και Waclaw Sierpiński (1882–1962), όταν σχεδίασαν κάποιες καμπύλες, οι οποίες, ως δημιουργήματα της – αρρωστημένης για πολλούς εκείνη την εποχή – φαντασίας τους, ονομάστηκαν «τέρατα», «ψυχωτικές» ακόμα και «παθολογικές». Είναι αμφίβολο αν είχε διανοηθεί κανείς ότι θα μπορούσε να υπάρχει στη φύση κάτι παρόμοιο μ' αυτές τις απίθανες και κομψές καμπύλες (βλ. Σχήμα 2). Για τον λόγο αυτό, οι ερευνητές των φυσικών επιστημών της εποχής εκείνης δεν έδειξαν μεγάλο ενδιαφέρον για τα αντικείμενα αυτά. Αντιθέτως, οι μαθηματικοί που δημιούργησαν τα «τέρατα»





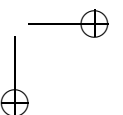
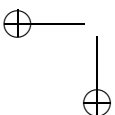
Σχήμα 2: Η καμπύλη Hilbert (α) στις δύο και (β) στις τρεις διαστάσεις.

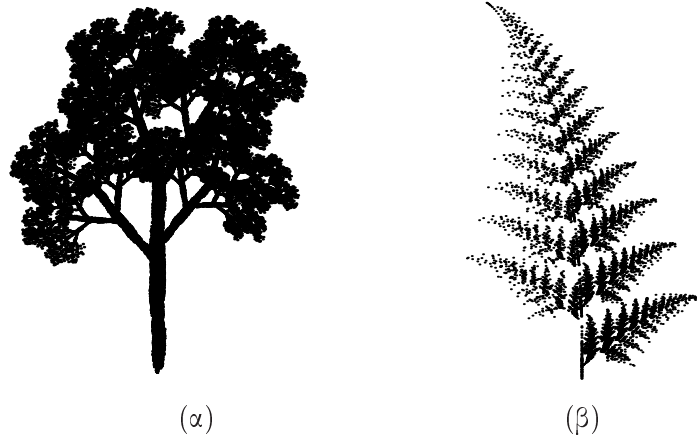
αυτά τα θεώρησαν σπουδαία, διότι αποτελούσαν απόδειξη ότι ο κόσμος των καθαρών μαθηματικών περιελάμβανε έναν πλούτο δυνατοτήτων, οι οποίες ξεπερνούσαν κατά πολύ τις μέχρι τότε απλούστερες δομές που είχαν παρατηρηθεί στη φύση.

Ένα δένδρο, για κάποιον που το παρατηρεί επιφανειακά, είναι ένας κορμός με κλαδιά που φέρουν φύλλα και καρπούς. Κοινότοπο. Όπως ένα σύννεφο, ένας βράχος, μια ακτή, μία έρημος, ένας γαλαξίας: τοπία που επαναλαμβάνονται. Και όμως δεν υπάρχουν δύο όμοια δένδρα ούτε δύο όμοια σύννεφα. Ούτε υπάρχουν δύο βράχοι, δύο ακτές, δύο έρημοι, δύο γαλαξίες των οποίων η μορφή και οι διαστάσεις συμπίπτουν απολύτως.

Ο κόσμος γύρω μας φαίνεται να αναπαράγει την εικόνα του σε κάθε κλίμακα, σαν τον κορμό ενός δένδρου (Σχήμα 3(α)) που απεικονίζεται σε μικρότερα αντίτυπα πάνω σε κάθε του κλαδί. Αυτός ο φυσικός κόσμος πολλαπλασιάζεται διατηρώντας ως ένα βαθμό τη μνήμη του αρχετύπου, σαν ένα φύλλο φτέρης (Σχήμα 3(β)) που αντιγράφει το ίδιο σχήμα σε καθένα από τα τμήματά του, όπως η ανάκλαση του ειδώλου ενός καθρέφτη μέσα στον ίδιο, χωρίς τέλος (Σχήμα 1). Ακόμη όμως και αν τα φύλλα ενός δένδρου μοιάζουν με αντίγραφα του ίδιου φύλλου, στην πραγματικότητα είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Για να μη μιλήσουμε για τους χτύπους της καρδιάς, τον μεταβολισμό των κυττάρων του ήπατος, τις καταιγίδες, τις παλίρροιες... Η φύση είναι αρκετά πιο πολύπλοκη από ό,τι την έχουν ως τώρα περιγράψει οι επιστήμονες.

Αν η γεωμετρία της φύσης ήταν Ευκλείδεια, θα ήταν πολύ εύκολο να αναπαράχθει η πολυπλοκότητα κάθε τοπίου με τη βοήθεια ευθειών, τριγώνων, κώνων, κύβων, κύκλων ή σφαιρών, δηλαδή αντικειμένων με ακέραια τιμή της διάστασης. Θα μπορούσαμε να ζωγραφίσουμε την περιφέρεια ενός νέφους ή την κατατομή ενός βουνού, απεικονίζοντας ακόμη και τις βαθύτερες λεπτομέρειες χωρίς κανένα πρόβλημα. Όμως τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Γι' αυτό πρωτίστως ας αναρωτηθούμε: Τι





Σχήμα 3: (α) Ένα δένδρο και (β) ένα φύλλο φτέρης.

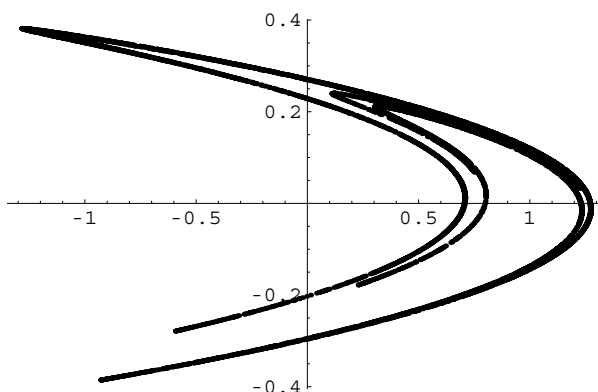
είναι διάσταση;

Υπάρχουν αρκετοί ορισμοί της διάστασης, καθ' ένας από τους οποίους βασίζεται σε εντελώς διαφορετικές ιδέες.

Ο πρώτος σχετίζεται με το πλήθος των συντεταγμένων που απαιτούνται για να προσδιορισθεί με βεβαιότητα η θέση ενός σημείου. Στο χώρο, αυτός ο αριθμός ισούται με το τρία. Στο επίπεδο αρκούν δύο συντεταγμένες, ενώ σε μία ευθεία χρειάζεται μία μόνο συντεταγμένη. Με αυτήν την έννοια, ο χώρος είναι τριδιάστατος, το επίπεδο διδιάστατο και η ευθεία μονοδιάστατη. Συνεπώς, σύμφωνα μ' αυτόν τον ορισμό, η διάσταση είναι πάντοτε ακέραιος αριθμός.

Ένας δεύτερος τρόπος ορισμού της διάστασης βασίζεται στην παρατήρηση ότι, για να χωρίσουμε ένα σχήμα σε δύο ασύνδετα τμήματα, αρκεί να αφαιρέσουμε ένα σύνολο του οποίου η διάσταση είναι κατά 1 μικρότερη. Για παράδειγμα, για να χωρίσουμε μια ευθεία αφαιρούμε ένα σημείο της. Για να χωρίσουμε ένα επίπεδο σχήμα, το κόβουμε κατά μήκος κάποιας καμπύλης, ενώ ένα στερεό το χωρίζουμε κατά μία επιφάνεια. Επομένως η διάσταση μπορεί να οριστεί επαγωγικά: αντιστοιχίζουμε τη διάσταση 0 σ' ένα μοναδικό σημείο ή, γενικότερα, σε οποιοδήποτε πεπερασμένο ή άπειρο αλλά αριθμήσιμο σύνολο. Η διάσταση οποιουδήποτε άλλου συνόλου υποθέτουμε ότι είναι μεγαλύτερη κατά 1 από τη διάσταση του συνόλου που το χωρίζει σε δύο ξένα τμήματα. Αυτή τη διάσταση την ονομάζουμε επαγωγική ή τοπολογική και είναι πάντοτε ακέραιος αριθμός.

Ένας τρίτος ορισμός της διάστασης προκύπτει ως μέτρο για το σχετικό βαθμό πολλαπλότητας και «τραχύτητας» που αντιστοιχεί στη δυνατότητα ενός σχήματος να καταλαμβάνει χώρο και σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από την Ευκλείδεια διάσταση του αντίστοιχου χώρου όπου βρίσκεται το σχήμα. Η διάσταση αυτή μπορεί να μην είναι ακέραιος πραγματικός αριθμός και ονομάζεται Hausdorff-



Σχήμα 4: Η καμπύλη Hénon (μορφοκλασματική διάσταση 1.26).

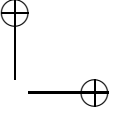
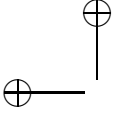
Besicovitch διάσταση. Για παράδειγμα, η αρχική μας κατασκευή με τη γραμμή η οποία όλο και πυκνώνει για να γεμίσει το επίπεδο του χαρτιού μας έχει Hausdorff–Besicovitch διάσταση κάπου ανάμεσα στο 1 και το 2. Όσο περισσότερο γεμίζει το χαρτί μας με γραμμές, τόσο πιο κοντά στο 2 βρίσκεται η διάσταση της γραμμής μας. Αντιστοίχως, στον χώρο θα είχαμε απεικονίσεις των οποίων η Hausdorff–Besicovitch διάσταση βρίσκεται μεταξύ 2 και 3. Η Hausdorff–Besicovitch διάσταση είναι ένα σημαντικότερο και, πολλές φορές, μετρήσιμο μέγεθος των φυσικών συστημάτων (βλ. Σχήμα 4). Επί πλέον, μπορούμε να την υπολογίσουμε μέσω διαφόρων θεωρητικών μοντέλων (βλ. [64], [152], [68]).

Ας επανέλθουμε λοιπόν στα ωραία μας σχήματα και ας δούμε σε τι μας χρησιμεύουν.

Εδώ και πολλά χρόνια έχει τεθεί το πρόβλημα της μέτρησης του μήκους των ακτών και των συνόρων μεταξύ χωρών, ιδιαίτερος, όταν θελήσουμε να το υπολογίσουμε με μεγάλη ακρίβεια. Στην περίπτωση όμως πολύπλοκων σχημάτων η περίμετρος δεν μπορεί να υπολογισθεί επειδή, λόγω των πάρα πολλών γωνιών και ακμών, η διαδικασία μέτρησης απαιτεί «άπειρο» χρόνο. Με άλλα λόγια, κάθε φορά που κατά τη μέτρηση λαμβάνουμε μικρότερη μονάδα μήκους (π.χ. χμ., μ., δεκ., εκ., χλστ. κ.ο.κ) βρίσκουμε όλο και μεγαλύτερο αριθμό.

Μια νέα αντίληψη για τη φύση εισήγαγε ο, πολωνικής καταγωγής, μαθηματικός Benoit Mandelbrot, ο οποίος ζει σήμερα στις ΗΠΑ. Το πρώτο του βιβλίο που εκδόθηκε το 1975 στα γαλλικά και το 1977 στα αγγλικά (βλ. [106]), συγκέντρωνε πολλά μαθηματικά και φυσικά παραδείγματα που τα κατέστησε κοινό κτήμα των επιστημόνων όλου του κόσμου. Η μεγαλύτερη όμως επιτυχία του ήταν ότι τα συνέδεσε και επινόησε ένα όνομα για όλα αυτά.

Τα αντικείμενα που έχουν μη αέραια διάσταση – ή μάλλον, τα αντικείμενα των οποίων η Hausdorff–Besicovitch διάστασή τους είναι γνησίως μεγαλύτερη της το-



πολογικής τους διάστασης – ονομάστηκαν από τον Mandelbrot, *fractals*. Η λέξη προέρχεται από τη λατινική λέξη *fractus* που σημαίνει σπασμένος, κομματιασμένος, θραυσμένος. Δόκιμος όρος στην ελληνική γλώσσα δεν υπάρχει. Πολλές φορές αποδίδονται ως μορφοκλάσματα (μορφοκλασματικά σύνολα), πολυσχιδή ή κλασματομορφές. Εμείς θα χρησιμοποιούμε από εδώ και στο εξής τον πρώτο όρο.

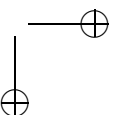
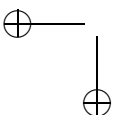
Σύμφωνα λοιπόν με τη θεωρία των μορφοκλασματικών συνόλων η φράση της Γεωγραφίας «το μήκος των ακτών μιας περιοχής είναι τόσα χιλιόμετρα» είναι λανθασμένη, ενώ η φράση «το εμβαδόν της ίδιας περιοχής είναι τόσα τετραγωνικά χιλιόμετρα» συνεχίζει να είναι σωστή! Αυτό μας δείχνει ότι η έννοια του μήκους μιας κλασματοειδούς καμπύλης δεν έχει ιδιαίτερο νόημα.

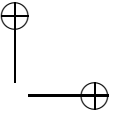
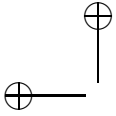
Δύο σχήματα ονομάζονται όμοια, αν το ένα από τα δύο είναι αντίγραφο του άλλου σε μεγέθυνση ή σε σμίκρυνση. Ένα μορφοκλάσμα καθορίζεται επίσης από το γεγονός της αυτοομοιότητας, δηλ. ότι ακόμα και στην απείρως μεγάλη μεγέθυνσή του, προκύπτει ένα όμοιο με αυτό σχήμα (βλ. [101], [150]). Το γεγονός αυτό εμπεριέχει την έννοια της «αναδρομής», οπότε ο υπολογιστής παίζει εδώ το ρόλο μιας συσκευής, όπως το μικροσκόπιο για τον γιατρό ή το τηλεσκόπιο για τον αστρονόμο. Βεβαίως, κάθε υπολογιστής έχει στη διάθεσή του ένα πεπερασμένο πλήθος αριθμών. Έτσι, μετά από μεγάλο πλήθος επαναλήψεων, το σφάλμα στρογγύλευσης επηρεάζει τόσο πολύ τον υπολογισμό, ώστε το αποτέλεσμα είναι σχεδόν άχρηστο.

Η κυριότερη διαδικασία η οποία ακολουθείται κατά τη δημιουργία τέτοιων ειδών μορφοκλασμάτων είναι η «επανάληψη» ή η συνώνυμη προς αυτή «ανάδραση». Πρόκειται περί επαναληπτικής διαδικασίας η οποία παρομοιάζεται με μια ανακυκλούμενη μηχανή αποτελούμενη από τρεις μονάδες, Εισαγωγής - Επεξεργασίας - Εξαγωγής, που συναντάται και στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων. Ένα δυναμικό σύστημα είναι γενικώς ένα σύνολο στοιχείων μαζί με τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους.

Ο Mandelbrot ισχυρίζεται ότι, όπως τα σχήματα της παραδοσιακής γεωμετρίας είναι ο φυσικός τρόπος αναπαράστασης ανθρώπινων κατασκευασμάτων, έτσι και οι μορφοκλασματικές καμπύλες είναι ο φυσιολογικός τρόπος αναπαράστασης πολύπλοκων αντικειμένων που εμφανίζονται στη φύση, όπως παράλια, αλπικά τοπία, δένδρα. Έτσι τα μορφοκλασματικά σύνολα έχουν διπλή αξία: ως καλλιτεχνικά αντικείμενα και ως ένας τρόπος αναπαράστασης φυσικών σκηνών (βλ. [126], [121], [133]).

Στη σημερινή εποχή έχει αναγνωρισθεί η σημασία της εικόνας, ως το χρησιμότερο μέσο περιγραφής πολύπλοκων αφηρημένων σχέσεων. Πολλοί άνθρωποι χρησιμοποιούν την αίσθηση του ωραίου, όχι τόσο για την ανεύρεση της αλήθειας, παρά για πληρότητα και για την κατανόηση διαφόρων φυσικών διεργασιών. Ένας απ' τους σημαντικότερους Γερμανούς μαθηματικούς, ο Hermann Weyl (βλ. [174]), έλεγε: «Με την εργασία μου προσπαθώ να ενοποιήσω την αλήθεια με το ωραίο. Όταν όμως πρέπει να διαλέξω το ένα ή το άλλο, συνήθως επιλέγω το ωραίο». Από τέτοιες φράσεις πηγάζει και η αίσθηση της ύπαρξης συγγένειας μεταξύ επιστήμης και τέχνης.





Επί πλέον, τα μορφοκλασματικά σύνολα εμφανίζονται εκ του φυσικού στις εκφράσεις μαθηματικών φαινομένων, όπως στην πρόβλεψη καιρικών συστημάτων και στην αύξηση ή μείωση των πληθυσμών, σε κολλοειδή εναπόθετα (λ.χ. σε αυτά που δημιουργούνται από σκόνη ή αιθάλη) καθώς και σε πολυμερή, ηλεκτροχημικά μίγματα και σε ενσωματώσεις ελεγχόμενες από διάχυση (βλ. [72], [33], [41], [30] και [155]). Επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη Βιολογία (βλ. [137], [138], [120], [97]), Γεωγραφία και ιδιαιτέρως στις τηλεπικοινωνίες ως μέσο συμπίεσης εικόνων για τη μετάδοση και ανακατασκευή τους (βλ. [20], [76] και [77]). Επίσης μορφοκλασματικές μορφές διέπουν τα σώματα ζώντων οργανισμών, δίνοντας το σχήμα των αγγειακών και νευρικών συστημάτων. Μέχρι και στην κατανομή των αστέρων και των γαλαξιών στο σύμπαν συναντάται η μορφή τους.

Στη φύση είναι πλέον κοινή πεποίθηση των ειδικών ότι τα πάντα είναι μορφοκλασματικά, αφού λείες γραμμές και επιφάνειες υπάρχουν μόνο στον ιδεατό κόσμο των μαθηματικών (βλ. [134]).

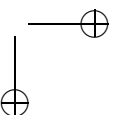
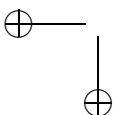
Τι σχέση έχουν τώρα η Τάξη και το Χάος μ' όλα αυτά;

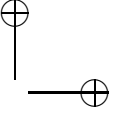
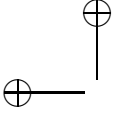
Θεωρητικώς, το μέλλον καθορίζεται πλήρως από το παρελθόν. Στην πράξη όμως υπάρχουν μικρές αβεβαιότητες, όπως είναι τα πολύ μικρά σφάλματα που γίνονται σε μετρήσεις, σφάλματα τα οποία όταν υπεισέρχονται στους υπολογισμούς γίνονται στη συνέχεια ολοένα και μεγαλύτερα με αποτέλεσμα, μόνον ότι η συμπεριφορά του υπό μελέτη φαινομένου βραχυπρόθεσμα είναι προβλέψιμη, δηλ. αιτιοκρατική, καθίσταται μακροπρόθεσμα μη προβλέψιμη, δηλ. χαώδης.

Σκοπός της ερευνητικής περιοχής του Χάους είναι, γενικώς, η προσπάθεια εξήγησης της πορείας μετάβασης από την Τάξη προς αυτό και αντιστρόφως. Η έννοια του Χάους συνδέεται άμεσα με την έννοια της προβλεπτικότητας: από παρόμοιες αρχικές υποθέσεις μπορούν να προκύψουν πολύ διαφορετικά συμπεράσματα (βλ. [171], [170], [172], [168]).

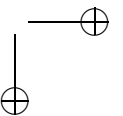
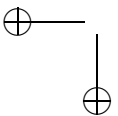
Το γεγονός αυτό είχε αντιληφθεί πριν από έναν αιώνα περίπου ο Γάλλος μαθηματικός και φιλόσοφος Henri Poincaré (1854–1912): «Μία ελάχιστη αιτία που διαφεύγει της προσοχής μπορεί να προκαλέσει ένα σημαντικό αποτέλεσμα», πράγμα που ερχόταν σε αντίθεση με την «αιτιοκρατία» του Γάλλου μαθηματικού και αστρονόμου Pierre Simon de Laplace (1794–1829). Το παράδοξο όμως είναι ότι το Χάος μπορεί να παραχθεί και αιτιοκρατικώς, δηλ. από σταθερούς κανόνες, οι οποίοι δεν εμπεριέχουν στοιχεία τύχης.

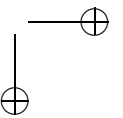
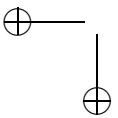
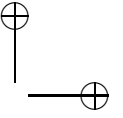
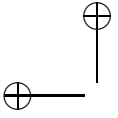
Ο μύθος της απόλυτης προβλεπτικότητας, η οποία εθεωρείτο αχώριστος σύντροφος της αιτιοκρατίας, έχει καταρριφθεί. Σήμερα πιστεύουμε ότι οι έννοιες «απόλυτη αιτιοκρατία» και «τυχαία μεταβολή» όχι μόνο δεν αποκλείουν η μία την άλλη, αλλά μπορούν να συνυπάρχουν και ότι η συνύπαρξη αυτή αποτελεί νόμο της φύσης. Η Θεωρία του Χάους και η Γεωμετρία των Μορφοκλασμάτων αναφέρονται ακριβώς στο θέμα αυτής της συνύπαρξης και η σχέση που υπάρχει μεταξύ τους δεν είναι καθόλου συμπτωματική. Ίσως ο καλύτερος τρόπος για να εκφράσει κανείς τη σχέση αυτή

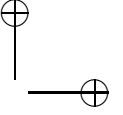
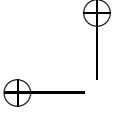




είναι να πει ότι η Γεωμετρία των Μορφοκλασμάτων είναι η Γεωμετρία του Χάους.







Κεφάλαιο 1

Χρήσιμες έννοιες μιγαδικής ανάλυσης

Στο κεφάλαιο αυτό συνοψίζουμε ωρισμένες βασικές έννοιες, οι οποίες θα φανούν χρήσιμες κατά την ανάπτυξη του θέματος της εργασίας μας. Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με κάποιες θεμελιώδεις έννοιες Πραγματικής Ανάλυσης ή Γενικής Τοπολογίας, όπως οι μετρικοί, οι τοπολογικοί χώροι κ.ά. Για περισσότερες πληροφορίες επί του θέματος παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στα [2], [36], [140] και [169].

1.1 Προκαταρκτικά

Ορισμός 1.1.1 Έστωσαν (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, $x \in X$ και ε ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Το σύνολο

$$D(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

καλείται ανοικτός δίσκος κέντρου x και ακτίνας ε (ως προς τη μετρική ρ), το σύνολο

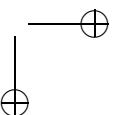
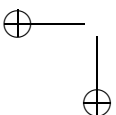
$$\Delta(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$$

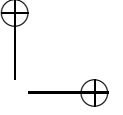
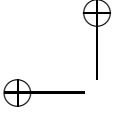
καλείται κλειστός ή κυκλικός δίσκος κέντρου x και ακτίνας ε (ως προς τη μετρική ρ) και το σύνολο

$$K(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) = \varepsilon\}$$

καλείται κύκλος κέντρου x και ακτίνας ε (ως προς τη μετρική ρ).

Ορισμός 1.1.2 Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Ο X είναι χώρος συνεκτικός, αν τα υποσύνολα του X που είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά είναι μόνο τα σύνολα X και \emptyset .





Είναι σαφές ότι ο X είναι χώρος συνεκτικός τότε και μόνο, εάν δεν υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα A, B του X , ώστε $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset, A \cup B = X$. Στην αντίθετη περίπτωση, ο X ονομάζεται ασύνδετος. Αν τα μόνα μη κενά, συνεκτικά υποσύνολα του X είναι τα μονοσύνολα, τότε ο X ονομάζεται ολικώς ασύνδετος.

Ορισμός 1.1.3 Έστωσαν (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $A \subset X$. Το A ονομάζεται συνεκτική συνιστώσα του X , αν το A είναι συνεκτικό σύνολο και δεν υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο του X που να περιέχει γνησίως το A .

Ορισμός 1.1.4 Έστωσαν X ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Η συνεκτική συνιστώσα του x στον X είναι το σύνολο

$$C(x) = \bigcup \{A \subset X : A \text{ συνεκτικό και } x \in A\},$$

δηλ. είναι η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του X που περιέχουν το x .

Σαφώς, η $C(x)$ είναι ένα μέγιστο συνεκτικό σύνολο, το οποίο είναι μη κενό, διότι το $\{x\}$ είναι συνεκτικό, και κλειστό.

Ορισμός 1.1.5 Ένα μη κενό, ανοικτό και συνεκτικό σύνολο ονομάζεται τόπος.

Ορισμός 1.1.6 Έστωσαν ένα σύνολο X και $f, f_n: X \rightarrow (Y, \rho), n = 1, 2, \dots$, όπου (Y, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος.

(i) Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο προς την f (συμβ. $f_n \rightarrow f$ κ.σ.) αν, για κάθε $x \in X$, το $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, δηλ. για κάθε $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

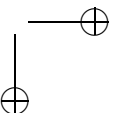
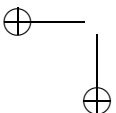
(ii) Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιομόρφως προς την f (συμβ. $f_n \rightarrow f$ ομ.) αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ για κάθε $x \in X$ και $n \geq n_0$.

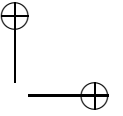
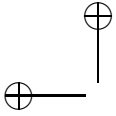
(iii) Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει τοπικώς ομοιομόρφως εντός του X προς την f , αν κάθε σημείο $x \in X$ έχει μία περιοχή εντός της οποίας η (f_n) συγκλίνει ομοιομόρφως προς την f .

Είναι σαφές από τους προηγούμενους ορισμούς ότι, αν $f_n \rightarrow f$ ομ. τότε $f_n \rightarrow f$ κ.σ.

Ορισμός 1.1.7 Έστω Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{C} . Μια μιγαδική συνάρτηση f ονομάζεται ολόμορφη ή αναλυτική στο Ω , αν έχει (μιγαδική) παράγωγο σε κάθε σημείο του Ω .

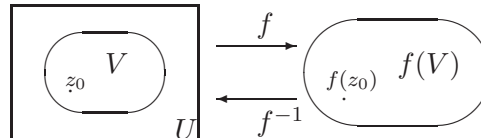
Το ακόλουθο ονομάζεται Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης ολόμορφων συναρτήσεων.





Θεώρημα 1.1.1 Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{C} . Αν η $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στο $z_0 \in U$ και $f'(z_0) \neq 0$, τότε η f είναι 1-1 σε κάποια ανοικτή περιοχή V του z_0 και η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1}: f(V) \rightarrow V$ είναι ολόμορφη.

Ισοδύναμο του προηγούμενου θεωρήματος είναι και το Πρόρισμα 6.62 του [169]. Τα συμπεράσματα του προηγούμενου θεωρήματος εικονογραφούνται στο Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Ολόμορφη απεικόνιση με τοπική αντίστροφη κοντά σ' ένα σημείο z_0 .

Ορισμός 1.1.8 Έστωσαν Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{C} , $a \in \Omega$ και $f: \Omega \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Το a ονομάζεται πόλος της f , αν $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.

Ορισμός 1.1.9 Μια μιγαδική συνάρτηση f ονομάζεται μερόμορφη σ' ένα ανοικτό υποσύνολο Ω του \mathbb{C} , αν υπάρχει ένα υποσύνολο A του Ω , ώστε το A δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης στο Ω , η f είναι ολόμορφη συνάρτηση στο $\Omega \setminus A$ και η f έχει πόλο σε κάθε σημείο του A .

Προφανώς, κάθε ολόμορφη, στο Ω , συνάρτηση είναι μερόμορφη. Αρκεί να θέσουμε $A = \emptyset$ στον προηγούμενο ορισμό.

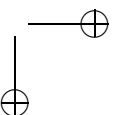
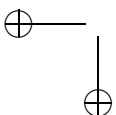
Θεώρημα 1.1.2 (Rouché) Έστωσαν Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{C} , f, g μερόμορφες συναρτήσεις στο Ω , $r > 0$ και $\Delta(a, r) \subset \Omega$. Αν οι f, g δεν έχουν ούτε ρίζες ούτε πόλους στην περιφέρεια $K(a, r)$ και $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$ για κάθε $|\zeta - a| = r$, τότε (το πλήθος των ριζών της $f + g$ στο $D(a, r)$) – (το πλήθος των πόλων της $f + g$ στο $D(a, r)$) = (το πλήθος των ριζών της f στο $D(a, r)$) – (το πλήθος των πόλων της f στο $D(a, r)$), (όπου μία ρίζα ή ένας πόλος τάξης k υπολογίζεται k φορές).

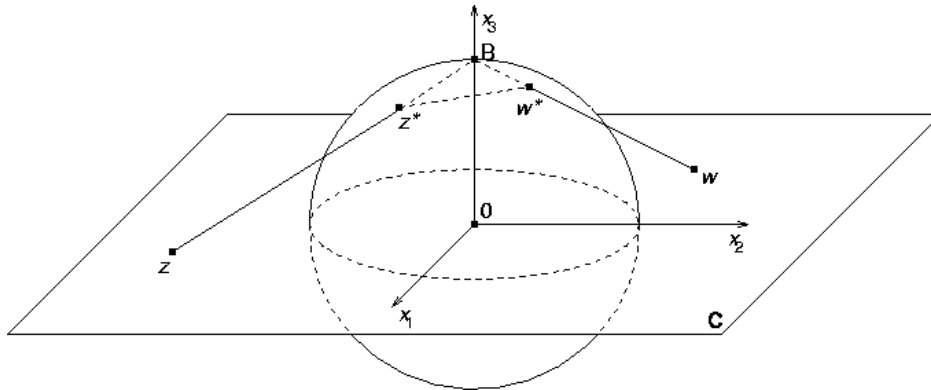
Απόδειξη. Βλ. [169], Θεώρημα 6.70. \square

1.2 Η στερεογραφική προβολή

Λαμβάνουμε ένα αφηρημένο σημείο, το οποίο συμβολίζουμε με ∞ και το προσαρτούμε στο μιγαδικό επίπεδο \mathbb{C} : το διευρυμένο μιγαδικό επίπεδο είναι απλώς η ένωση $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Για να επιτύχουμε μια μετρική στο $\overline{\mathbb{C}}$, ταυτίζουμε το \mathbb{C} με το οριζόντιο επίπεδο

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$$





Σχήμα 1.2: Η στερεογραφική προβολή.

του \mathbb{R}^3 και συνεχίζουμε για τη συνηθισμένη κατασκευή του $\overline{\mathbb{C}}$ ως σφαίρα.

Έστω S η σφαίρα στο \mathbb{R}^3 με μοναδιαία ακτίνα και κέντρο την αρχή των αξόνων έτσι, ώστε το \mathbb{C} κόβει την S κατά μήκος του ισημερινού, δηλ. S είναι η σφαίρα Riemann

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

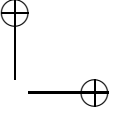
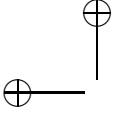
και συμβολίστε το σημείο $(0, 0, 1)$ (το υψηλότερο σημείο της S) με B . Αυτό το σημείο ονομάζεται βόρειος πόλος. Μια άλλη επιλογή είναι να θεωρήσουμε ότι ο νότιος πόλος βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

Τώρα προβάλλουμε κάθε σημείο $z \in \mathbb{C}$ γραμμικώς προς (ή μακριά από) το B έως ότου συναντήσει την S σ' ένα σημείο z^* διαφορετικό του B : αυτό σημαίνει ότι μια ευθεία από το B προς ένα σημείο z στο μιγαδικό επίπεδο τέμνει τη σφαίρα σε ένα σημείο z^* . Η απεικόνιση $\pi: z \mapsto z^*$ ονομάζεται στερεογραφική προβολή του \mathbb{C} στο S . Μπορούμε ισοδυνάμως να ορίσουμε την $\pi: S \setminus \{B\} \rightarrow \mathbb{C}$ με $\pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ix_2)/(1 - x_3)$.

Το βόρειο ημισφαίριο της S , δηλ. το σύνολο $\{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_3 > 0\}$, αντιστοιχεί, μέσω της π , στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, δηλ. στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Το νότιο ημισφαίριο της S , δηλ. το σύνολο $\{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_3 < 0\}$, αντιστοιχεί, μέσω της π , στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, δηλ. στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Επίσης για $|z| = 1$, $z^* = z$.

Πρόταση 1.2.1 Η στερεογραφική προβολή π είναι ένας ομοιομορφισμός των $S \setminus \{B\}$ και \mathbb{C} (δηλ. η π είναι 1-1, επί και οι π , π^{-1} είναι συνεχείς). Η π^{-1} δίνεται απ' τη σχέση:

$$\pi^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \right).$$



Προφανώς, αν το $|z|$ είναι «μεγάλο», τότε το z^* βρίσκεται «κοντά» στο B και, έχοντας τούτο υπό όψιν, ορίζουμε την προβολή $\pi(\infty)$ του ∞ να είναι το B . Αυτή η απεικόνιση είναι *σύμμορφη* (δηλ., διατηρεί τις γωνίες) και έτσι οι αντίστοιχες σύμμορφες γεωμετρικές είναι ίδιες. Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, η τοπολογική ταύτιση του $\overline{\mathbb{C}}$ με την S μας επιτρέπει να τα χρησιμοποιούμε εναλλάξ, επειδή η π είναι μία αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση από το $\overline{\mathbb{C}}$ στην S . Τούτο εξηγεί γιατί το $\overline{\mathbb{C}}$ ονομάζεται επίσης και σφαίρα Riemann· βλ. Σχήμα 1.2. Επειδή η σφαίρα Riemann είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^3 , το $\overline{\mathbb{C}}$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος και άρα πλήρης.

Τώρα χρησιμοποιούμε την αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση π του $\overline{\mathbb{C}}$ επί της S , ώστε να μεταφέρουμε την ευκλείδεια μετρική (του \mathbb{R}^3) από την S προς μία μετρική χ στο $\overline{\mathbb{C}}$. αυτό απλώς σημαίνει ότι η χ ορίζεται κατά φυσικό τρόπο από τον τύπο

$$\chi(z, w) = |\pi(z) - \pi(w)| = |z^* - w^*|.$$

Καθώς $\chi(z, w)$ είναι το ευκλείδειο μήκος της χορδής που συνδέει το z^* με w^* , η χ ονομάζεται *χορδική μετρική* στον $\overline{\mathbb{C}}$.

Πρόταση 1.2.2 Η χορδική μετρική δίδεται από τις σχέσεις:

$$\chi(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}$$

όταν $z, w \in \mathbb{C}$, ενώ, για κάθε $z \in \mathbb{C}$,

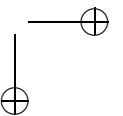
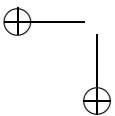
$$\chi(z, \infty) = \lim_{w \rightarrow \infty} \chi(z, w) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Η έννοια της σύγκλισης, προς το άπειρο, μιας ακολουθίας μιγαδικών αριθμών διευκρινίζεται στην ακόλουθη

Πρόταση 1.2.3 Έστω $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Το $z_n \rightarrow \infty$ τότε και μόνο, αν $|z_n| \rightarrow +\infty$, δηλ. αν για κάθε $r > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $|z_n| > r$.

1.3 Σύγκλιση ολόμορφων συναρτήσεων

Ορισμός 1.3.1 Έστωσαν $A \subset \mathbb{C}$ και $(f_n), f$ συναρτήσεις ωρισμένες στο A λαμβάνουσες τιμές στο \mathbb{C} . Λέμε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει προς την f ομοιομόρφως στα συμπαγή υποσύνολα του A , αν, για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset A$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 = n_0(K, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, ώστε $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και $z \in K$.



Παράδειγμα 1.3.1 Έστωσαν $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και f_n, f μιγαδικές συναρτήσεις με $f_n(z) = z^n$, $f(z) = 0$ για κάθε $z \in U$ και $n = 1, 2, \dots$. Τότε, για κάθε $z \in U$, έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0 = f(z),$$

δηλ. η $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.

Όμως η (f_n) δε συγκλίνει ομοιομόρφως προς την f στο U .

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(z) - f(z)| \geq \varepsilon$ για κάποιο $z \in U$. Η εξίσωση $|f_n(z) - f(z)| = |z^n| = |z|^n$, $n = 1, 2, \dots$ με το z περιορισμένο στους πραγματικούς αριθμούς μας δίνει μία συνεχή συνάρτηση $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(0) = 0$ και $g(1) = 1$. Έπεται ότι υπάρχει ένας αριθμός $z_0 \in (0, 1)$, άρα και στο U , για τον οποίο $g(z_0) = 1/2$ (διαφορετικά το $g([0, 1])$ θα ήταν ασύνδετο, άτοπο, διότι απ' το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής το $g([0, 1])$ είναι διάστημα και άρα συνεκτικό). Θέτουμε $\varepsilon = 1/2$, οπότε προκύπτει το αποτέλεσμα.

Η $f_n \rightarrow f$ ομοιομόρφως σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του U .

Ένα συμπαγές υποσύνολο του U είναι φραγμένο και κλειστό και έτσι βρίσκεται μέσα σε έναν κλειστό δίσκο $\Delta(0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ για κάποιο $r < 1$. Έστω ότι δίνεται $\varepsilon > 0$ και υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\varepsilon < 1$. Θα επιτύχουμε την $|z|^n < \varepsilon$ παίρνοντας $(1/|z|)^n > 1/\varepsilon \Leftrightarrow n \log(1/|z|) > \log(1/\varepsilon) \Leftrightarrow n > \log(1/\varepsilon)/\log(1/|z|)$, δηλ. τότε έχουμε $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Αυτή η ανισότητα ισχύει ταυτοχρόνως για κάθε $z \in \Delta(0, r)$ εφ' όσον, αφού $|z| \leq r$, επιλέξουμε $n > \log(1/\varepsilon)/\log(1/r)$.

Συμβολισμοί.

Έστωσαν U ένα μη κενό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, ρ) και (Y, σ) ένας μετρικός χώρος. Θέτουμε $C(U, Y) = \{f: U \rightarrow Y \mid f \text{ συνεχής}\}$, το οποίο είναι γραμμικός χώρος με τις σημειακές πράξεις. Αν $Y = \mathbb{C}$ ή $Y = \overline{\mathbb{C}}$ τότε, αντί για $C(U, Y)$, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $C(U)$.

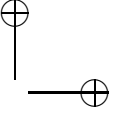
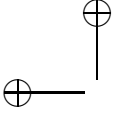
Επίσης, εάν U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{C} , θέτουμε $H(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ολόμορφη}\}$, το οποίο είναι γραμμικός υπόχωρος του $C(U)$.

Θεώρημα 1.3.1 (Weierstrass) Υποθέτουμε ότι η (f_n) είναι μία ακολουθία στο $H(U)$, η οποία συγκλίνει ομοιομόρφως προς μία απεικόνιση f . Τότε η f είναι ολόμορφη στο U και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z)$$

ομοιομόρφως στα συμπαγή υποσύνολα του U για κάθε $z \in U$ και $k = 1, 2, \dots$

Απόδειξη. Βλ. [169], Θεώρημα 6.4 και Πρόγραμμα 6.5 ή [36], Κεφ. VII, Θεώρημα 2.1. \square



Ορισμός 1.3.2 Ένα σύνολο $\mathcal{F} \subset H(U)$ λέγεται τοπικώς φραγμένο, αν, για κάθε σημείο $a \in U$, υπάρχουν σταθερές M και $r > 0$ τέτοιες, ώστε για κάθε $f \in \mathcal{F}$ έχουμε $|f(z)| \leq M$ για $|z - a| < r$ και $z \in U$. Εναλλάξ, το \mathcal{F} είναι τοπικώς φραγμένο, αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο, ώστε

$$\sup\{|f(z)| : |z - a| < r, f \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Έτσι, το \mathcal{F} είναι τοπικώς φραγμένο, αν, γύρω από κάθε σημείο a του U , υπάρχει ένας δίσκος πάνω στον οποίο το \mathcal{F} είναι ομοιομόρφως φραγμένο. Αυτό επεκτείνεται αμέσως προς την απαίτηση να είναι το \mathcal{F} ομοιομόρφως φραγμένο σε συμπαγή υποσύνολα του U .

Λήμμα 1.3.1 Ένα σύνολο \mathcal{F} στο $H(U)$ είναι τοπικώς φραγμένο τότε και μόνο, αν, για κάθε συμπαγές $K \subset U$, υπάρχει μια πραγματική σταθερά $M_K > 0$ τέτοια, ώστε

$$|f(z)| \leq M_K,$$

για κάθε $f \in \mathcal{F}$ και $z \in K$.

Θεώρημα 1.3.2 (Vitali) Αν η (f_n) είναι μία, τοπικώς φραγμένη, ακολουθία αναλυτικών, σε κάποιον τόπο $U \subset \mathbb{C}$, συναρτήσεων με $f_n: U \rightarrow \mathbb{C}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και υπάρχει $\emptyset \neq V \subset U$ ανοικτό τέτοιο, ώστε το $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ για κάθε $z \in V$, τότε η οριακή συνάρτηση f επεκτείνεται σε μια αναλυτική, στο U , συνάρτηση και η $f_n \rightarrow f$ ομοιομόρφως στα συμπαγή υποσύνολα του U .

1.4 Δυναμικά συστήματα και ρητές απεικονίσεις

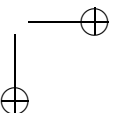
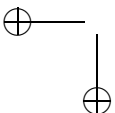
Συμβολισμός. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με f^n θα συμβολίζουμε τη σύνθεση της f με τον εαυτό της n φορές, δηλαδή

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n,$$

όπου f^0 είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Ας προσέξουμε ότι η παράσταση $[f(z)]^n$ αναφέρεται σε δυνάμεις, ενώ η παράσταση $f^n(z)$ σε συνθέσεις.

Ορισμός 1.4.1 Ένα δυναμικό σύστημα είναι ένας μετασχηματισμός $f: X \rightarrow X$ σε έναν μετρικό χώρο (X, ρ) . Τούτο συμβολίζεται με $\{X; f\}$. Η έμπροσθεν τροχιά ενός σημείου $x \in X$ είναι το σύνολο

$$O^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0, f^0(x) = x\}.$$



Αν η f είναι αντιστρέψιμη, μπορούμε να ορίσουμε ολόκληρη την τροχιά του x ως

$$O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}, f^0(x) = x\}$$

και την όπισθεν τροχιά του x ως

$$O^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \geq 0, f^0(x) = x\}.$$

Έστωσαν $S \subset \mathbb{R}^n$ και $f: S \rightarrow S$ μια συνεχής απεικόνιση. Ένα επαναληπτικό σχήμα $\{f^k\}$ καλείται διακεκριμένο δυναμικό σύστημα.

Ορισμός 1.4.2 Έστω $\{X; f\}$ ένα δυναμικό σύστημα. Ένα περιοδικό σημείο περιόδου n μιας συνάρτησης $f: X \rightarrow X$ είναι ένα σημείο $x \in X$ τέτοιο, ώστε $f^n(x) = x$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Ο ελάχιστος τέτοιος ακέραιος λέγεται ελάχιστη ή πρωτίστη περίοδος του περιοδικού σημείου x . Συμβολίζουμε το σύνολο των περιοδικών σημείων, της f , περιόδου n με $Per_n(f)$. Η τροχιά ενός περιοδικού σημείου της f λέγεται κύκλος ή περιοδική τροχιά της f . Η ελάχιστη περίοδος ενός κύκλου είναι το πλήθος των διαφορετικών σημείων που περιέχει. Μια περίοδος ενός κύκλου της f είναι μια περίοδος ενός σημείου στον κύκλο. Ένα περιοδικό σημείο της f περιόδου 1 ονομάζεται σταθερό σημείο της f .

Μια ρητή συνάρτηση είναι της μορφής $R = P/Q$, όπου P και Q είναι πολυώνυμα. Υποθέτουμε, και αυτό είναι ουσιώδες, ότι τα P και Q δεν έχουν κοινούς παράγοντες, οπότε ούτε κοινές ρίζες. Για να ορίσουμε την R σε όλο το $\overline{\mathbb{C}}$, πρέπει να ορίσουμε το $R(\infty)$. Προφανώς οι ρίζες του Q είναι πόλοι της R . Αν ορίζαμε $R(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} R(z)$ δε θα καθορίζαμε την τάξη μιας ρίζας ή πόλου στο ∞ . Θέτουμε λοιπόν $R_1(z) = R(1/z)$ οπότε $R(\infty) = R_1(0)$.

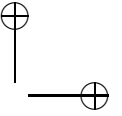
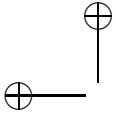
Ο βαθμός της R ορίζεται ως $\deg(R) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$. Ο βαθμός μιας ρητής συνάρτησης R μετρά πόσες φορές η R «τυλίγει» τη σφαίρα Riemann γύρω από τον εαυτό της και ισούται με το πλήθος (προσημετρώντας τις πολλαπλότητες) των αντίστροφων εικόνων οιοδήποτε σημείου της $\overline{\mathbb{C}}$.

Έστω \mathcal{R} ο χώρος των ρητών συναρτήσεων. Το \mathcal{R} είναι κλειστό υποσύνολο του $C(\overline{\mathbb{C}})$, διότι, αν οι ρητές συναρτήσεις R_n συγκλίνουν ομοιομόρφως προς την R πάνω στη μιγαδική σφαίρα, η R είναι αναλυτική πάνω στη σφαίρα και επομένως ρητή.

Θεώρημα 1.4.1 Η απεικόνιση $\deg: \mathcal{R} \rightarrow \{0, 1, \dots\}$ είναι συνεχής. Συγκεκριμένα, αν οι ρητές συναρτήσεις R_n συγκλίνουν ομοιομόρφως πάνω στη μιγαδική σφαίρα προς τη συνάρτηση R , τότε η R είναι ρητή και, για αρκετά μεγάλο n , $\deg(R_n) = \deg(R)$.

Ορισμός 1.4.3 Ο πολλαπλασιαστής, $m(R, \zeta)$, μίας ρητής απεικόνισης R σε ένα σταθερό σημείο ζ δίνεται απ' τον τύπο

$$m(R, \zeta) = \begin{cases} R'(\zeta), & \text{αν } \zeta \neq \infty \\ 1/R'(\infty), & \text{αν } \zeta = \infty. \end{cases}$$



Ορισμός 1.4.4 Ένας μετασχηματισμός $R: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ της μορφής

$$R(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ με

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow ad \neq bc,$$

καλείται γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός ή μετασχηματισμός Möbius.

Αν $c \neq 0$, τότε $R(-d/c) = \infty$ και $R(\infty) = a/c$. Αν $c = 0$, τότε $R(\infty) = \infty$. Ο αντίστροφός του είναι ο

$$R^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

αν $c \neq 0$.

Ορισμός 1.4.5 Έστωσαν $f: A \rightarrow A$ και $g: B \rightarrow B$ δύο απεικονίσεις. Οι f και g λέγονται τοπολογικώς συζυγείς, αν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $h: A \rightarrow B$ τέτοιος, ώστε $h \circ f = g \circ h$. Ο ομοιομορφισμός h καλείται τοπολογική συζυγία.

Περισσότερες πληροφορίες επί των δυναμικών συστημάτων θα βρείτε στα [89], [35], [84] και [118].

1.5 Φυσιολογικές οικογένειες και ισοσυνέχεια

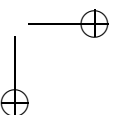
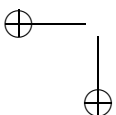
Οι έννοιες που αναπτύσσονται στη συνέχεια, αποτελούν τη βάση της Μιγαδικής Αναλυτικής Δυναμικής, η οποία σκιαγραφείται στο επόμενο κεφάλαιο. Τα βιβλία [34] και [142] αναφέρονται λεπτομερώς στις φυσιολογικές οικογένειες και στη σχέση τους με την ισοσυνέχεια.

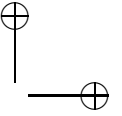
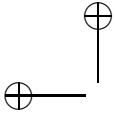
Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{C} και \mathcal{F} μία οικογένεια συναρτήσεων ωρισμένων στο U και με τιμές εντός ενός μετρικού χώρου (Y, ρ) .

Ορισμός 1.5.1 Η οικογένεια \mathcal{F} είναι φυσιολογική εντός του U , αν κάθε ακολουθία μελών της \mathcal{F} περιέχει μία υπακολουθία, η οποία συγκλίνει ομοιομόρφως επί κάθε συμπαγούς υποσυνόλου του U . Η \mathcal{F} είναι φυσιολογική σε ένα σημείο z του U , αν είναι φυσιολογική επί κάποιου ανοικτού συνόλου V που περιέχει το z . (Σημειώστε ότι η \mathcal{F} είναι τότε φυσιολογική σε κάθε σημείο του V).

Παρατηρήσεις 1.5.1

(α) Φυσιολογικότητα σε κάθε σημείο ενός ανοικτού συνόλου V δεν επάγει φυσιολογικότητα στο V . (Εστιάζουμε σε συμπαγή υποσύνολα).





Πράγματι, έστω $z \in V$. Αφού η \mathcal{F} είναι φυσιολογική στο z , είναι φυσιολογική σε κάποιο ανοικτό V_z που περιέχει το z . Άρα κάθε ακολουθία μελών της \mathcal{F} περιέχει μία υπακολουθία η οποία συγκλίνει ομοιομόρφως σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του V_z , το οποίο μπορεί και να μη βρίσκεται εντός του V . Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε μία ακολουθία μελών της \mathcal{F} της οποίας κάθε υπακολουθία να συγκλίνει ομοιομόρφως σε συμπαγές υποσύνολο εκτός του V .

(β) Η οικογένεια (f_n) του Παραδείγματος 1.3.1 είναι φυσιολογική, διότι συγκλίνει ομοιομόρφως στα συμπαγή υποσύνολα του U , οπότε το ίδιο συμβαίνει και με όλες τις υπακολουθίες της.

Ο ακόλουθος ορισμός συμπίπτει με τον προηγούμενο, αν θεωρήσουμε ως πεδίο τιμών το $\overline{\mathbb{C}}$.

Ορισμός 1.5.2 Μια οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων ωρισμένων στο U ονομάζεται φυσιολογική μέσα στο U , αν κάθε ακολουθία περιέχει ή μία υπακολουθία η οποία συγκλίνει ομοιομόρφως επί κάθε συμπαγούς υποσυνόλου του U ή μία υπακολουθία η οποία τείνει ομοιομόρφως προς το ∞ επί κάθε συμπαγούς υποσυνόλου του U .

Το ακόλουθο θεώρημα συχνά αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως Κριτήριο Φυσιολογικότητας του Montel.

Θεώρημα 1.5.1 (Montel) Έστω (g_k) μία οικογένεια μιγαδικών αναλυτικών συναρτήσεων σε ένα ανοικτό υποσύνολο U του \mathbb{C} . Αν η (g_k) δεν είναι φυσιολογική οικογένεια στο U τότε, για κάθε $w \in \mathbb{C}$ με μία το πολύ εξαίρεση, έχουμε ότι $g_k(z) = w$ για κάποιο $z \in U$ και κάποιο $k \in \mathbb{N}$, δηλ.

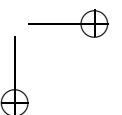
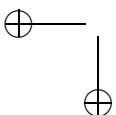
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} g_k(U) = \mathbb{C} \text{ (εξαιρώντας ίσως ένα σημείο).}$$

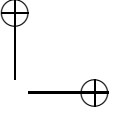
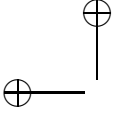
Παραλλαγή του προηγούμενου θεωρήματος για μερόμορφες, αυτή τη φορά, απεικονίσεις αποτελεί το ακόλουθο

Θεώρημα 1.5.2 (Montel) Έστω \mathcal{F} μία οικογένεια μερόμορφων συναρτήσεων ωρισμένες σε ένα ανοικτό υποσύνολο U του $\overline{\mathbb{C}}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν σημεία a, b, c στο $\overline{\mathbb{C}}$ τέτοια, ώστε

$$\left[\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(U) \right] \cap \{a, b, c\} = \emptyset.$$

Τότε η \mathcal{F} είναι μία φυσιολογική οικογένεια στο U .





Προφανώς, το προηγούμενο θεώρημα ταιριάζει περισσότερο σε ρητές απεικονίσεις, διότι ορίζονται σε όλο το $\overline{\mathbb{C}}$ και είναι πιθανό να έχουν πόλους.

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί παραλλαγή του προηγούμενου πάνω στο ίδιο θέμα. Οι τρεις τιμές τις οποίες αποτυγχάνει να λάβει κάθε συνάρτηση f της οικογένειας \mathcal{F} , εξαρτώνται τώρα από την f . Είναι πάρα πολύ να αναμένουμε ότι οι τρεις τιμές θα είναι πλήρως αυθαίρετες και πρέπει να προσθέσουμε την απαίτηση να διαχωρίζονται ομοιομόρφως πάνω στη σφαίρα.

Θεώρημα 1.5.3 Έστω \mathcal{F} μία οικογένεια απεικονίσεων όπου κάθε μία είναι αναλυτική σε έναν τόπο Ω της μιγαδικής σφαίρας. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει μια θετική σταθερά m και, για κάθε $f \in \mathcal{F}$, τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία a_f, b_f και c_f στο $\overline{\mathbb{C}}$ τέτοια, ώστε:

[i) Η $f \in \mathcal{F}$ δεν παίρνει τις τιμές a_f, b_f και c_f στο Ω και

[ii) $\min\{\chi(a_f, b_f), \chi(b_f, c_f), \chi(c_f, a_f)\} \geq m$.

Τότε η \mathcal{F} είναι φυσιολογική στο Ω .

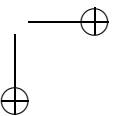
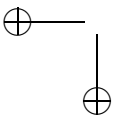
Παράδειγμα 1.5.1 Έστω $f(z) = \lambda z, \lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| > 1$. Άρα $f^n(z) = \lambda^n z$. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{C} . Όλα εξαρτώνται από το αν το 0 ανήκει ή όχι στο U .

(i) $0 \notin U$. Ισχυριζόμαστε ότι η $\{f^n: U \rightarrow \mathbb{C}\}$ είναι φυσιολογική στο U , διότι σε κάθε συμπαγές και άρα κλειστό υποσύνολο V του U , υπάρχει μία ελάχιστη τιμή $r > 0$ του $|z|$ και έτσι $|f^n(z)| \geq |\lambda|^n r$ για κάθε $z \in V$. Άρα $f^n \rightarrow \infty$ ομοιομόρφως στο V .

(ii) $0 \in U$. Η δήλωση ότι η $f^n \rightarrow \infty$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο V του U δεν αληθεύει πλέον, αφού $f^n(0) = 0$ και μπορούμε να επιλέξουμε το V , ώστε να περιέχει το 0 . Εξ άλλου, η $f^n \rightarrow f$ (f αναλυτική) απορρίπτεται, επειδή, για κάθε $z \neq 0$ στο U έχουμε ότι $|f^n(z)| \rightarrow \infty$. Άρα η (f^n) δεν είναι φυσιολογική στο U . Τώρα μπορούμε να επαληθεύσουμε το Θεώρημα του Montel για την ειδική αυτή περίπτωση δείχνοντας ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U) = \mathbb{C}.$$

Αφού το U είναι ανοικτό και περιέχει το 0 , περιέχει κάθε z με $|z| < r$ για κάποιο $r > 0$. Έστω ότι το $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Αρκεί να βρούμε z με $|z| < r$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $\lambda^n z = z_0$. Αυτό είναι το $z = z_0/\lambda^n$. Παίρνουμε το n τόσο μεγάλο, ώστε $|z_0|/|\lambda|^n < r$ και τότε το z βρίσκεται στο U , όπως απαιτείτο.



Παράδειγμα 1.5.2 Έστω $f(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| < 1$. Τότε η (f^n) είναι φυσιολογική σε κάθε ανοικτό σύνολο U , διότι συγκλίνει ομοιομόρφως προς τη σταθερή συνάρτηση \mathbb{O} σε κάθε συμπαγές σύνολο.

Ορισμός 1.5.3 Έστω X τοπολογικός χώρος, $x_0 \in X$ και $\mathcal{F} \subset \{f: X \rightarrow (Y, \rho)\}$. Το \mathcal{F} είναι ισοσυνεχές στο x_0 , αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x_0 με $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, για κάθε $x \in U$ και $f \in \mathcal{F}$. Το \mathcal{F} ονομάζεται ισοσυνεχές, αν είναι ισοσυνεχές σε κάθε σημείο $x_0 \in X$.

Παρατηρήστε ότι κάθε συνάρτηση σε μία ισοσυνεχή οικογένεια είναι συνεχής.

Θεώρημα 1.5.4 (Arzelà–Ascoli) Μια οικογένεια $\mathcal{F} \subset C(U, Y)$ είναι φυσιολογική εντός του U τότε και μόνο, αν

- (i) για κάθε $z \in U$, το σύνολο $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ βρίσκεται μέσα σε ένα συμπαγές υποσύνολο του Y .
- (ii) η \mathcal{F} είναι ισοσυνεχής σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του U .

Το ακόλουθο θεώρημα ισχύει στη σφαίρα Riemann.

Θεώρημα 1.5.5 (Arzelà–Ascoli) Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\overline{\mathbb{C}}$ και $\mathcal{F} \subset C(U, \overline{\mathbb{C}})$. Τότε η οικογένεια \mathcal{F} είναι ισοσυνεχής επί του U τότε και μόνο, αν είναι φυσιολογική εντός του U .

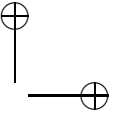
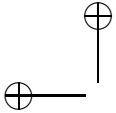
Παρατηρείστε την ομοιότητα μεταξύ φυσιολογικότητας και της ιδιότητας των Bolzano–Weierstrass (βλ. [2] Κεφάλαιο 3, Θεώρημα 7). Για να υπάρξει κάτι περισσότερο από ομοιότητα, χρειάζεται να ορίσουμε μία απόσταση πάνω στο χώρο των, ωρισμένων στο U , συναρτήσεων με τιμές στο \mathbb{C} , οπότε η σύγκλιση ως προς αυτήν την συνάρτηση απόστασης θα σημαίνει ακριβώς το ίδιο, όπως η ομοιόμορφη σύγκλιση σε συμπαγή σύνολα.

Ορισμός 1.5.4 Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{C} . Μία ακολουθία, (K_n) , συμπαγών υποσυνόλων του U ονομάζεται εξαντλούσα, αν

- (i) $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και
- (ii) $K \subset K_n$ για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του U και κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Έστω ότι f, g είναι οιοσδήποτε δύο συναρτήσεις στο ανοικτό σύνολο U με τιμές στο $\overline{\mathbb{C}}$. Θα ορίσουμε μία απόσταση $\rho(f, g)$ μεταξύ αυτών των συναρτήσεων, η οποία ως μη συγχυστεί με τις αποστάσεις $d(f(z), g(z))$ μεταξύ των τιμών τους. Αντικαθιστούμε την d με την συνάρτηση απόστασης

$$\delta(a, b) = \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b)}$$



ή με την ισοδύναμη προς αυτή

$$\delta(a, b) = \min\{1, d(a, b)\}$$

οι οποίες έχουν το πλεονέκτημα ότι είναι φραγμένες. Έπειτα θέτουμε

$$\delta_n(f, g) = \sup_{z \in K_n} \delta(f(z), g(z))$$

και

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_n(f, g). \quad (1.1)$$

Ορισμός 1.5.5 *Σ' έναν μετρικό (ή γενικότερα σ' έναν τοπολογικό) χώρο ένα υποσύνολό του ονομάζεται σχετικώς συμπαγές, αν η κλειστή θήκη του στο χώρο αυτό είναι συμπαγές σύνολο.*

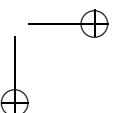
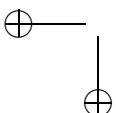
Έτσι, στο \mathbb{C} , ένα σύνολο είναι σχετικώς συμπαγές τότε και μόνο, αν είναι φραγμένο.

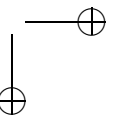
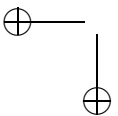
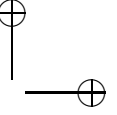
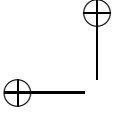
Θεώρημα 1.5.6 (Montel) *Ένα σύνολο $\mathcal{F} \subset H(U)$ είναι σχετικώς συμπαγές (στον μετρικό χώρο $(H(U), \rho)$) τότε και μόνο, αν το \mathcal{F} είναι τοπικώς φραγμένο.*

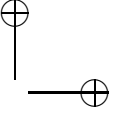
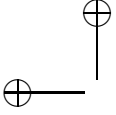
Ιστορικώς, ένα σχετικώς συμπαγές σύνολο \mathcal{F} στον χώρο $H(U)$ των ολόμορφων συναρτήσεων σ' ένα ανοικτό υποσύνολο U του \mathbb{C} , ονομάζεται φυσιολογική οικογένεια συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.5.7 *Μία οικογένεια $\mathcal{F} \subset C(U, Y)$ είναι φυσιολογική τότε και μόνο, αν η $\overline{\mathcal{F}}$ είναι συμπαγής.*

Θεώρημα 1.5.8 *Έστω \mathcal{F} οιαδήποτε οικογένεια απεικονίσεων, κάθε μία από τις οποίες απεικονίζει τον (X, ρ) εντός του (X_1, ρ_1) . Τότε υπάρχει ένα μέγιστο ανοικτό υποσύνολο του X στο οποίο η \mathcal{F} είναι ισοσυνεχής. Συγκεκριμένα, αν η f απεικονίζει έναν μετρικό χώρο (X, ρ) στον ίδιο, τότε υπάρχει ένα μέγιστο ανοικτό υποσύνολο του X στο οποίο η οικογένεια των επαναλήψεων (f^n) είναι ισοσυνεχής.*







Κεφάλαιο 2

Τα σύνολα Julia και Fatou

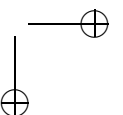
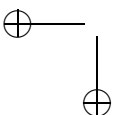
Γύρω στα 1918–20 οι Γάλλοι μαθηματικοί G. Julia [96] και P. Fatou [69], [70] ανέπτυξαν, ανεξαρτήτως ο ένας του άλλου, τη θεωρία της «ρητής επανάληψης»¹ έχοντας ως κύριο εργαλείο το Κριτήριο Φυσιολογικότητας του Montel. Ανεκάλυψαν τη διχοτόμηση της σφαίρας Riemann σε σύνολα που σήμερα φέρουν το όνομά τους.

Παρά' όλο που το κεφάλαιο τούτο δεν αποτελεί αυθεντική εργασία του συγγραφέα, οι αποδείξεις των θεωρημάτων παρουσιάζονται εδώ για πρώτη φορά σε πλήρη μορφή. Η χρησιμοποιούμενη φρασεολογία είναι παρόμοια με αυτήν των βιβλίων [67], [90], [21], [32] και [145], καθώς και των εργασιών [24] και [29]. Όπως θα διαπιστώσετε στη συνέχεια, ασχολούμαστε μόνο με πολυωνυμικές και ρητές απεικονίσεις. Σε ό,τι αφορά τριγωνομετρικές ή, γενικότερα, ακέραιες απεικονίσεις, παραπέμπουμε στις [71], [151], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [116], [47], [53], [66] και [99].

2.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

Σε όλα τα επόμενα, εκτός αν άλλως αναφέρεται, θεωρούμε ότι $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ένα πολυώνυμο της μορφής $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, $a_n \neq 0$ με μιγαδικούς συντελεστές, ότι R είναι μία ρητή συνάρτηση της μορφής $R = P/Q$, όπου P και Q είναι μιγαδικά πολυώνυμα χωρίς κοινούς παράγοντες και ότι f είναι μια τυχούσα συνάρτηση λ.χ. τριγωνομετρική. Η ανάπτυξη της θεωρίας θα γίνεται παραλλήλως για την πολυωνυμική και την ρητή περίπτωση.

¹Στη σύγχρονη γλώσσα, τη θεωρία των μιγαδικών αναλυτικών δυναμικών συστημάτων $(f, \bar{\mathbb{C}})$.



Ορισμός 2.1.1 Τα σύνολα Julia και Fatou της f είναι, αντιστοίχως, τα σύνολα

$$\begin{aligned} J(f) &= \{z \in \mathbb{C} : \eta (f^n) \text{ δεν είναι φυσιολογική στο } z\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : \eta (f^n) \text{ δεν είναι φυσιολογική σε κανένα ανοικτό σύνολο} \\ &\quad \text{περιέχον το } z\} \\ F(f) &= \mathbb{C} \setminus J(f) \\ &= \{z \in \mathbb{C} : \eta (f^n) \text{ είναι φυσιολογική σε κάποιο ανοικτό σύνολο} \\ &\quad \text{περιέχον το } z\} \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις 2.1.1

(α) Το $F(p)$ είναι ανοικτό, οπότε το $J(p)$ είναι κλειστό υποσύνολο του \mathbb{C} .

(β) Στο Παράδειγμα 1.5.1 και στην περίπτωση που $0 \in U$, η ακολουθία (f^n) δεν ήταν φυσιολογική σε κανένα ανοικτό σύνολο που περιέχει την αρχή 0. Άρα $0 \in J(f)$.

Στην περίπτωση που $0 \notin U$ δείχθηκε ότι αν $z \neq 0$, τότε $\eta (f^n)$ είναι φυσιολογική σε κάποιο ανοικτό σύνολο που περιέχει το z , άρα $z \in F(f)$. Συμπεραίνουμε ότι $J(f) = \{0\}$ όταν $f(z) = \lambda z$ με $|\lambda| > 1$, ένα μάλλον αδιάφορο σύνολο Julia. Στην περίπτωση που $|\lambda| < 1$ η (f^n) είναι φυσιολογική σε κάθε σημείο του επιπέδου, άρα $J(f) = \emptyset$. Συνεπώς, τα σύνολα Julia των πολυωνύμων της μορφής $f(z) = az + b$ δε θα μας απασχολήσουν περισσότερο.

Ο πιο αξιόπιστος τρόπος για να εξασφαλίσουμε τον απανταχού ορισμό μίας ρητής συνάρτησης R , είναι να εργαστούμε με την $R: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ οπότε, αντικαθιστώντας το \mathbb{C} με το $\overline{\mathbb{C}}$ στον Ορισμό 2.1.1, μπορούμε να ορίσουμε τα σύνολα Julia και Fatou μίας ρητής συνάρτησης. Όμως, λόγω των Θεωρημάτων 1.5.5 και 1.5.8, έχουμε και τον ακόλουθο ισοδύναμο ορισμό.

Ορισμός 2.1.2 Έστω R μία μη σταθερή ρητή συνάρτηση. Το σύνολο Fatou της R είναι το μέγιστο ανοικτό υποσύνολο του $\overline{\mathbb{C}}$ στο οποίο $\eta (R^n)$ είναι ισοσυνεχής και το σύνολο Julia της R είναι το συμπλήρωμά του στο $\overline{\mathbb{C}}$.

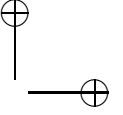
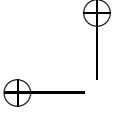
Παρατηρήσεις 2.1.2

(α) Το $F(R)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\overline{\mathbb{C}}$.

(β) Το $J(R)$ είναι συμπαγές σύνολο, ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $\overline{\mathbb{C}}$.

Πρόταση 2.1.1 Αν $\deg(p) \geq 2$, τότε $J(p) \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $J(p) = \emptyset$. Τότε $\eta (p^n)$ είναι φυσιολογική σε κάθε σημείο $z \in \mathbb{C}$. Άρα για κάθε $z \in \mathbb{C}$, υπάρχει κάποιο ανοικτό σύνολο V_z στο οποίο $\eta (p^n)$ είναι φυσιολογική και το οποίο περιέχει το z . Προφανώς $\eta (p^n)$ είναι τότε φυσιολογική σε κάθε σημείο του συνόλου V_z . Έστω τώρα $r > 0$. Αφού η $\Delta(0, r)$ είναι συμπαγής, μπορεί να καλυφθεί από ένα πεπερασμένο πλήθος ανοικτών συνόλων στο καθ' ένα



από τα οποία η (p^n) είναι φυσιολογική. Θα δείξουμε ότι η (p^n) είναι φυσιολογική στην $D(0, r)$, δηλ. ότι κάθε ακολουθία συναρτήσεων αυτής της οικογένειας έχει μια υπακολουθία, η οποία συγκλίνει ομοιομόρφως σε κάθε συμπαγές υποσύνολο της $D(0, r)$.

Έχουμε ότι $D(0, r) \subset \Delta(0, r) \subset \bigcup_{i=1}^k V_{z_i}$. Η (p^n) είναι φυσιολογική στο V_{z_1} , άρα κάθε ακολουθία συναρτήσεων αυτής της οικογένειας έχει μία υπακολουθία $(p^{n_i})_{i=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει ομοιομόρφως σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του V_{z_1} . Η (p^n) είναι φυσιολογική στο V_{z_2} , άρα κάθε ακολουθία συναρτήσεων απάυτην την οικογένεια, άρα και η $(p^{n_i})_{i=1}^{\infty}$, έχει μία υπακολουθία $(p^{n'_i})_{i=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει ομοιομόρφως σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του V_{z_2} ως υπακολουθία της (p^n) , αλλά και σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του V_{z_1} ως υπακολουθία της $(p^{n_i})_{i=1}^{\infty}$, οπότε συγκλίνει ομοιομόρφως σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $V_{z_1} \cup V_{z_2}$.

Τελικώς καταλήγουμε σε μία υπακολουθία η οποία συγκλίνει ομοιομόρφως σε κάθε συμπαγές υποσύνολο της ένωσης $\bigcup_{i=1}^k V_{z_i}$ και επειδή $D(0, r) \subset \bigcup_{i=1}^k V_{z_i}$, η υπακολουθία αυτή συγκλίνει ομοιομόρφως σε κάθε συμπαγές υποσύνολο της $D(0, r)$.

Αφού το p είναι ένα πολυώνυμο, λαμβάνοντας το r αρκετά μεγάλο εξασφαλίζουμε ότι η $D(0, r)$ περιέχει ένα σημείο z για το οποίο $|p^n(z)| \rightarrow \infty$ ομοιομόρφως στην $D(0, r)$ και περιέχει επίσης ένα σταθερό σημείο w της p με $p^n(w) = w$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Άρα είναι αδύνατο για μία υπακολουθία της (p^n) να συγκλίνει ομοιομόρφως ή προς μία φραγμένη συνάρτηση ή προς το άπειρο σε οιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο της $D(0, r)$ η οποία περιέχει και το z και το w , πράγμα που αντιφάσκει ως προς τη φυσιολογικότητα της (p^n) . \square

Πρόταση 2.1.2 Αν $\deg(R) \geq 2$, τότε $J(R) \neq \emptyset$.

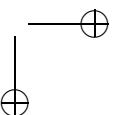
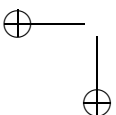
1η Απόδειξη. Αν $J(R) = \emptyset$, τότε $F(R) = \overline{\mathbb{C}}$, οπότε η οικογένεια (R^n) είναι φυσιολογική στο $\overline{\mathbb{C}}$ και έτσι, απ' το Θεώρημα 1.4.1, υπάρχει κάποια υπακολουθία της (R^n) στην οποία κάθε απεικόνιση έχει τον ίδιο βαθμό. Όμως, $\deg(R^n) = [\deg(R)]^n$ και αυτό προϋποθέτει ότι η R έχει βαθμό ένα, ενάντιο προς τον ισχυρισμό μας.

2η Απόδειξη. (Βλ. [24]) Υποθέτουμε ότι $J(R) = \emptyset$. Τότε $F(R) = \overline{\mathbb{C}}$ και έτσι η οικογένεια (R^n) είναι φυσιολογική στο $\overline{\mathbb{C}}$. Μία υπακολουθία $(R^{n_k})_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιομόρφως σε συμπαγή υποσύνολα του $\overline{\mathbb{C}}$ (εντός της σφαιρικής μετρικής) προς μία μερόμορφη (άρα και ρητή) οριακή συνάρτηση S . Αφού η S είναι μία συνεχής συνάρτηση της διδιάστατης σφαίρας, μπορούμε να δημιουργήσουμε αντίφαση θεωρώντας τον τοπολογικό βαθμό της S . Έτσι

$$\deg(S) \leftarrow \deg(R^{n_k}) \rightarrow \infty \text{ καθώς } k \rightarrow \infty.$$

Αλλά $\deg(S) < \infty$. \square

Παρατηρήσεις 2.1.3



Ενδέχεται $F(R) = \emptyset$. Το παράδειγμα που δόθηκε από τον Lattés το 1918 της

$$R(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)}$$

αποτελεί μια τέτοια περίπτωση (βλ. [21]).

Λήμμα 2.1.1 Αν $\deg(p) > 1$, τότε υπάρχει κάποια ακτίνα $r > 0$ τέτοια, ώστε $|p(z)| \geq 2|z|$ στο ανοικτό σύνολο $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. Συνεπώς, $p^n \rightarrow \infty$ ομοιομόρφως στο V , καθώς $n \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Έστω $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ με $a_n \neq 0, n \geq 2$ ένα μιγαδικό πολυώνυμο. Θα δείξουμε ότι $|p(z)| - 2|z| \geq 0$ για κάθε $z \in V$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |p(z)| - 2|z| &= |a_nz^n + \dots + a_0| - 2|z| \geq |a_nz^n + \dots + a_1z| - |a_0| - 2|z| \\ &\geq \dots \geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \dots - (|a_1| + 2)|z| - |a_0| \\ &= |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + (|a_1| + 2)|z| + |a_0|). \end{aligned}$$

Θέτουμε $f(z) = a_nz^n$ και $g(z) = |a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_0|$. Παρατηρούμε ότι αν $r_0 > 0$ και $|z| = r_0$, τότε $|f(z)| = |a_n|r_0^n$ και $|g(z)| = |a_{n-1}|r_0^{n-1} + \dots + (|a_1| + 2)r_0 + |a_0|$. Εφόσον

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{|a_n|r_0^n}{|a_{n-1}|r_0^{n-1} + \dots + (|a_1| + 2)r_0 + |a_0|} = \infty,$$

έπεται ότι υπάρχει $r > 0$, ώστε $|f(z)| > |g(z)|$ για κάθε $|z| > r$. Άρα, $|p(z)| - 2|z| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$ για κάθε $z \in V$. Συνεπώς, $|p(p(z))| \geq 2|p(z)| \geq 2^2|z|$ και γενικώς $|p^n(z)| \geq 2^n|z| > 2^n r$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $|z| > r$.

Τελικώς, η $p^n \rightarrow \infty$ ομοιομόρφως στο V καθώς $n \rightarrow \infty$. \square

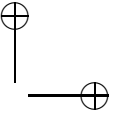
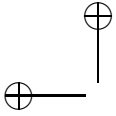
Πρόταση 2.1.3 Αν $\deg(p) \geq 2$, τότε το $J(p)$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη. Συμφώνως προς την Παρατήρηση 2.1.1(α), αρκεί να δείξουμε ότι το $J(p)$ είναι φραγμένο, δηλ. ότι υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $z \in \mathbb{C}$ τέτοια, ώστε $J(p) \subset D(z, \varepsilon)$. Από το Λήμμα 2.1.1 έχουμε ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η $p^n \rightarrow \infty$ ομοιομόρφως στο ανοικτό σύνολο $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. Εξ' ορισμού, η (p^n) είναι φυσιολογική στο V , οπότε

$$V \subset F(p) = \mathbb{C} \setminus J(p) \iff J(p) \subset \mathbb{C} \setminus V = D(z, r). \quad \square$$

Η ακόλουθη πρόταση ισχύει και για ρητές απεικονίσεις.

Πρόταση 2.1.4 Αν $\deg(p) > 0$, τότε $J(p^k) = J(p)$ και $F(p^k) = F(p)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.



Απόδειξη. Έχουμε ότι $F(p) \subset F(p^k)$, διότι αν κάθε υπακολουθία της (p^n) περιέχει μία υπακολουθία ομοιομόρφως συγκλίνουσα σε ένα δοθέν σύνολο V , τότε το ίδιο ισχύει και για την (p^{nk}) , δηλ. για την $((p^k)^n)$.

Τώρα για την $F(p) \supset F(p^k)$. Παρατηρούμε πρώτα ότι αν μια οικογένεια συναρτήσεων (g_n) είναι ομοιομόρφως συγκλίνουσα σε ένα συμπαγές υποσύνολο D , τότε το ίδιο ισχύει και για την οικογένεια $(h \circ g_n)$ για κάθε συνεχή απεικόνιση h . Άρα, έστω (p^{nk}) φυσιολογική σε ένα ανοικτό σύνολο V . Τότε όμοια είναι η $(p^{nk+s}) = (p^s \circ p^{nk})$ για κάθε $s = 0, 1, \dots, k-1$. Θεωρούμε μία υπακολουθία S (εξ' ορισμού άπειρη) της (p^n) . Αν η S περιείχε μόνο πεπερασμένα το πλήθος μέλη κάθε μιας από τις k ακολουθίες (p^{nk+s}) με $0 \leq s \leq k-1$, η S θα ήταν πεπερασμένη. Επομένως η S περιέχει μια άπειρη υπακολουθία της (p^{nk+s}) για κάποιο s , η οποία, λόγω φυσιολογικότητας της (p^{nk+s}) , έχει μία υπακολουθία ομοιομόρφως συγκλίνουσα σε συμπαγή υποσύνολα του V . Άρα η (p^n) είναι φυσιολογική. \square

Θεώρημα 2.1.1 Έστω p ένα πολυώνυμο τουλάχιστον δευτέρου βαθμού. Τότε το $\infty \in F(p)$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.1.1, υπάρχει κάποια ανοικτή περιοχή V του ∞ στην οποία η $p^n \rightarrow \infty$ ομοιομόρφως, καθώς $n \rightarrow \infty$. Άρα η p^n είναι φυσιολογική στην V και έτσι $\infty \in F(p)$. \square

2.2 Πλήρως αναλλοίωτα σύνολα

Ορισμός 2.2.1 Αν g είναι μία απεικόνιση ενός συνόλου X στο ίδιο, ένα υποσύνολο E του X είναι:

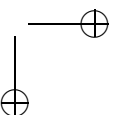
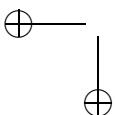
- (i) έμπροσθεν αναλλοίωτο, αν $g(E) = E$
- (ii) όπισθεν αναλλοίωτο, αν $g^{-1}(E) = E$ και
- (iii) πλήρως αναλλοίωτο, αν $g(E) = E = g^{-1}(E)$.

Αν η g είναι επί (δηλ., αν $g(X) = X$), τότε οι έννοιες του όπισθεν και έμπροσθεν αναλλοιώτου συμπίπτουν.

Ορισμός 2.2.2 Έστω $f: X \rightarrow X$ μία συνάρτηση στον μετρικό χώρο (X, ρ) . Ένα $A \subset X$ καλείται ο ελκυστής της f , αν το A είναι κλειστό σύνολο και έμπροσθεν αναλλοίωτο υπό την f τέτοιο, ώστε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(f^k(x), A) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in V$$

με $A \subset V$, όπου το V είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X .



Το ανοικτό σύνολο V καλείται *λεκάνη έλξης* (βλ. [115]).

Λήμμα 2.2.1 Έστω G τόπος και υποθέτουμε ότι η $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ είναι αναλυτική και $a \in G$ τέτοιο, ώστε $|f(a)| \leq |f(z)|$ για κάθε $z \in G$. Τότε, ή $f(a) = 0$ ή η f είναι σταθερή.

Λήμμα 2.2.2 (Αρχή του ελαχίστου) Αν f είναι μία μη σταθερή αναλυτική συνάρτηση σε ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο G και είναι συνεχής στο \bar{G} τότε, ή η f έχει μία ρίζα στο G ή η $|f|$ δέχεται την ελάχιστη τιμή της στο ∂G .

Θεώρημα 2.2.1 Υποθέτουμε ότι $d = \deg(p) \geq 2$ και ότι ο μοναδιαίος κύκλος K είναι πλήρως αναλλοίωτος. Τότε $p(z) = az^d$, όπου $|a| = 1$.

Απόδειξη. Έστω $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και $D^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$. Καθώς το σύνολο K είναι πλήρως αναλλοίωτο, έπεται ότι το $p(D)$ είναι ή D ή D^* και καθώς το p είναι φραγμένο στο D , $p(D) = D$. Καθώς το K είναι πλήρως αναλλοίωτο, έπεται τώρα ότι $|p(z)| \rightarrow 1$ καθώς $|z| \rightarrow 1$. Όλα αυτά επάγουν ότι

$$p(z) = g_1(z) \dots g_d(z), \quad (2.1)$$

όπου κάθε g_j είναι μία απεικόνιση Möbius του D επί του εαυτού του. Η τελευταία σχέση προκύπτει ως εξής:

Ορίζουμε την $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ με $f(z) = p(z)/B(z)$ όπου B είναι ένα πεπερασμένο γινόμενο ίδιου τύπου με αυτό της σχέσης (2.1), του οποίου οι ρίζες συμπίπτουν με αυτές του p στο D . Αν $f(z) = 0$ για κάθε $z \in D$ τότε θα έπρεπε, $p(z) = 0$, αλλά τότε και $B(z) = 0$, άτοπο. Άρα η $|f|$ δέχεται ελάχιστη τιμή στο $\partial D = K$. Από αυτό και απ' το γεγονός ότι το p δεν έχει πόλους στο \mathbb{C} , συμπεραίνουμε ότι όλες οι ρίζες του p βρίσκονται στην αρχή των αξόνων και έτσι το p έχει την απαιτούμενη μορφή. \square

Το Θεώρημα 2.2.1 δείχνει ότι, για ένα πολυώνυμο p , το σύνολο $J(p)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος τότε και μόνο, αν $p(z) = az^n$, όπου $|a| = 1$ και $n \geq 2$.

Παράδειγμα 2.2.1 Το σύνολο Julia της $f(z) = z^n, n \geq 2$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος, δηλ. $J(f) = K(0, 1) = S^1$.

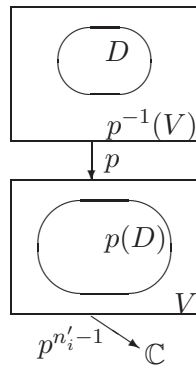
Πρόταση 2.2.1 Τα σύνολα $J(p)$ και $F(p)$ είναι πλήρως αναλλοίωτα.

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι το $F(p)$ είναι πλήρως αναλλοίωτο και επειδή η p είναι επί, αρκεί να δείξουμε μόνο ότι είναι όπισθεν αναλλοίωτο. Το αποτέλεσμα είναι τότε επακόλουθο των

1. $F \subset p^{-1}(F)$

2. $F \supset p^{-1}(F)$.

Αποδεικνύουμε τη δεύτερη. Έστω $w \in p^{-1}(F)$. Τότε το $z = p(w) \in p(p^{-1}(F)) \stackrel{p}{=} F$, οπότε η (p^n) είναι φυσιολογική σε ένα ανοικτό σύνολο V που περιέχει το z . Θα αποδείξουμε ότι το $w \in F$ δείχνοντας ότι η (p^n) είναι φυσιολογική στο ανοικτό σύνολο $p^{-1}(V)$ που περιέχει το w , διότι $w \in p^{-1}(p(w)) \subset p^{-1}(V)$. Έστω ότι (p^{n_i}) είναι μια υπακολουθία της (p^n) . Τότε το ίδιο είναι και η (p^{n_i-1}) , η οποία περιέχει μία υπακολουθία $(p^{n'_i-1})$ ομοιομόρφως συγκλίνουσα σε συμπαγή υποσύνολα του V . Έστω ότι D είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $p^{-1}(V)$. Τότε το $p(D)$ είναι ένα



Σχήμα 2.1: Ομοιομορφη σύγκλιση της $(p^{n'_i})$ μέσα στο D .

συμπαγές υποσύνολο του V και έτσι η $(p^{n'_i-1})$ είναι ομοιομόρφως συγκλίνουσα στο $p(D)$. Γι' αυτό, βλ. Σχήμα 2.1, η $(p^{n'_i})$ είναι ομοιομόρφως συγκλίνουσα εντός του D . Αυτό αποδεικνύει τη 2. \square

Η ολική δομή των συνόλων Julia πρέπει να εμφανίζεται επίσης στις εικόνες και τις αντίστροφες εικόνες του συνόλου Julia, πράγμα που δείχνει εμφανή αυτοομοιότητα. Αυτή η αυτοομοιότητα δεν πρέπει να συγχέεται με τη γνήσια ή συγγενή αυτοομοιότητα. Εδώ η ομοιότητα βασίζεται σε έναν μη γραμμικό μετασχηματισμό και έτσι, τα μικρότερα αντίγραφα του συνόλου Julia που περιέχονται σ' αυτό δεν είναι ακριβή αντίγραφα αλλά αρκετά παραμορφωμένα, ακόμη και διπλωμένα πάλι στα ίδια.

Πρόταση 2.2.2 Αν $\deg(p) > 0$, τότε το $\{\infty\}$ είναι πλήρως αναλλοίωτο.

Πρόταση 2.2.3 Έστω $\deg(p) \geq 2$. Τότε η περιέχουσα το ∞ συνεκτική συνιστώσα, F_∞ , του F είναι πλήρως αμετάβλητη υπό το p .

2.3 Εξαιρετικά σημεία

Απ' το Θεώρημα του Montel 1.5.1 προκύπτει το ακόλουθο

Πόρισμα 2.3.1 Έστω $w \in J(p)$. Τότε, για κάθε ανοικτή περιοχή U του w , η $\bigcup_{n=1}^{\infty} p^n(U)$ παραλείπει το πολύ ένα σημείο του \mathbb{C} .

Απόδειξη. Από τον ορισμό του $J(p)$ και επειδή $w \in J(p)$, η οικογένεια (p^n) δεν είναι φυσιολογική στο w , άρα ούτε στο U . Το αποτέλεσμα έπεται απ' το Θεώρημα 1.5.1. \square

Θεώρημα 2.3.1 Υποθέτουμε ότι u είναι το εξαιρετικό σημείο που παραλείπεται στην άπειρη ένωση του προηγούμενου πορίσματος, δηλ. υπάρχει ένα σημείο $w \in J(p)$ και μία ανοικτή περιοχή U του w τέτοια, ώστε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} p^n(U) = \mathbb{C} \setminus \{u\}.$$

Τότε $p(z) = u + c(z - u)^d$ για κάποιο $c \in \mathbb{C}$ και $\deg(p) = d$.

Απόδειξη. Θέτουμε $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} p^n(U)$, άρα $u \notin W$. Αν $p(z) = u$ για κάποιο $z \in \mathbb{C}$, τότε $z \notin W$, διότι απ' την $p(W) \subset W$ έχουμε ότι $W \subset p^{-1}(p(W)) \subset p^{-1}(W)$ και $\{z\} \subset p^{-1}(p(z)) \not\subset p^{-1}(W)$. Καθώς $\mathbb{C} \setminus W = \{u\}$, έχουμε ότι $z = u$. Άρα η μόνη λύση της εξίσωσης $p(z) - u = 0$ είναι το u , δηλ. το u είναι σταθερό σημείο καθώς και η μόνη αντίστροφη εικόνα του p . Έτσι, απ' το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αλγέβρας, $p(z) - u = c(z - u)^d$ για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{C}$ και $d = \deg(p)$. Συνεπώς, $p(z) = u + c(z - u)^d$ για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{C}$ και $d = \deg(p)$. \square

Λήμμα 2.3.1 Οιοδήποτε τέτοιο εξαιρετικό σημείο u , όπως αυτό του προηγούμενου θεωρήματος, δεν βρίσκεται στο $J(p)$ και είναι ανεξάρτητο των w και U .

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι η (p^n) είναι φυσιολογική στο u , οπότε $u \notin J(p)$. Έχουμε ότι

$$p^n(z) - u = c^{\sum_{i=0}^{n-1} d^i} (z - u)^{d^n} = c^{\frac{d^n - 1}{d - 1}} (z - u)^{d^n} = c^{-\frac{1}{d-1}} [c^{\frac{1}{d-1}} (z - u)]^{d^n},$$

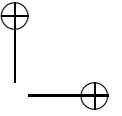
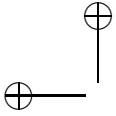
η οποία για να συγκλίνει θα πρέπει

$$|c^{\frac{1}{d-1}} (z - u)| < 1 \iff |z - u| < |c|^{-\frac{1}{d-1}}.$$

Υποθέτουμε ότι κάποιο z βρίσκεται στον ανοικτό δίσκο

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - u|^{d-1} < 1/|2c|\},$$

κέντρου u . Τότε $|p(z) - u| < (1/2)|z - u|$, άρα η $p^n(z)$ συγκλίνει ομοιομόρφως προς το u σε κάθε υποσύνολο του D και έτσι η (p^n) είναι φυσιολογική στο u . Προφανώς, το u εξαρτάται μόνο απ' το πολυώνυμο p . \square



Πρόταση 2.3.1 Έστω p ένα πολυώνυμο βαθμού $n \geq 2$, το οποίο έχει ένα εξαιρετικό σημείο στο a . Τότε το p είναι τοπολογικώς συζυγές προς το $q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $q(z) = z^n$.

Απόδειξη. Έστω ότι $q(z) = z^n$. Απ' το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι

$$p(z) = a + c(z - a)^n$$

για κάποιο $c \neq 0$. Επιλέγουμε οιαδήποτε $(n - 1)$ στη ρίζα μ του c , δηλ. τέτοια ώστε $\mu^{n-1} = c$ και ορίζουμε $h(z) = \mu(z - a)$. Τότε $q \circ h = h \circ p$, δηλ. το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{p} & U \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{q} & \mathbb{C} \end{array}$$

όπου U είναι μια περιοχή του w , είναι μεταθετικό. \square

Έπεται ότι το σύνολο Julia ενός πολυωνύμου με μία εξαιρετική τιμή $u \in \mathbb{C}$ είναι ένας κύκλος κέντρου u και ακτίνας $|c|^{-1/(d-1)}$.

Πόρισμα 2.3.2 Τα ακόλουθα ισχύουν για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με μία το πολύ εξαίρεση.

(α) Αν U είναι ένα ανοικτό σύνολο τέτοιο, ώστε $U \cap J(p) \neq \emptyset$, τότε $p^{-k}(z) \cap U \neq \emptyset$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

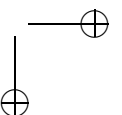
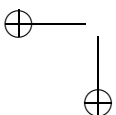
(β) Αν $z \in J(p)$, τότε

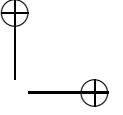
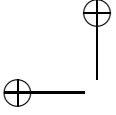
$$J(p) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} p^{-k}(z)},$$

δηλ. η $\bigcup_{k=1}^{\infty} p^{-k}(z)$ είναι πυκνή στο $J(p)$.

Απόδειξη. (α) Δεδομένου ότι το z δεν είναι το εξαιρετικό σημείο του προηγούμενου λήμματος, $z \in p^k(U)$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, δηλ. $z = p^k(w)$ για κάποιο $w \in U \cap J$, άρα $w \in p^{-k}(p^k(w)) = p^{-k}(z)$, οπότε $p^{-k}(z) \cap U \neq \emptyset$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Χρησιμοποιώντας αυτό επαναληπτικώς παίρνουμε μια άπειρη ακολουθία από k με $p^{-k}(z) \cap U \neq \emptyset$.

(β) Αν $z \in J(p)$, τότε $p^{-k}(z) \subset p^{-k}(J(p)) = J(p)$ για κάθε $k = 1, 2, \dots$ λόγω της όπισθεν αμεταβλησίας. Θέτουμε $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} p^{-k}(z)$, άρα $W \subset J \Rightarrow \overline{W} \subset \overline{J} = J$. Έστω τώρα $w \in J$ και U ένα ανοικτό σύνολο με $w \in U$. Απ' το (α) έχουμε ότι $p^{-k}(w) \cap U \neq \emptyset$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ (το w δεν είναι ένα παραλειπόμενο εξαιρετικό σημείο, αφού $w \in J(p)$). Άρα οιαδήποτε ανοικτό σύνολο U περιέχον το w τέμνει το W , οπότε $w \in \overline{W}$. Συνεπώς, $J(p) \subset \overline{W}$. \square





Ορισμός 2.3.1 Ένα σημείο z λέγεται ότι είναι εξαιρετικό για την R , όταν η όπισθεν τροχιά του, $O^-(z)$, είναι πεπερασμένη. Το σύνολο αυτών των σημείων συμβολίζεται με $E(R)$.

Προφανώς το σύνολο $E(R)$ είναι πεπερασμένο.

Θεώρημα 2.3.2 Μία ρητή απεικόνιση R τουλάχιστον δευτέρου βαθμού έχει το πολύ δύο εξαιρετικά σημεία. Αν $E(R) = \{\zeta\}$, τότε η R είναι συζυγής με ένα πολυώνυμο, όπου το ζ αντιστοιχεί στο ∞ . Αν $E(R) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ με $\zeta_1 \neq \zeta_2$, τότε η R είναι συζυγής με κάποια απεικόνιση $z \mapsto z^d$, όπου τα ζ_1 και ζ_2 αντιστοιχούν στα 0 και ∞ , αντιστοίχως, και d είναι κάποιος ακέραιος.

Πόρισμα 2.3.3 $J^\circ(p) = \emptyset$, δηλ. το $J(p)$ έχει κενό εσωτερικό.

Απόδειξη. Έστω ότι $J^\circ(p) \neq \emptyset$, άρα το $J(p)$ περιέχει ένα ανοικτό σύνολο U . Τότε $p^k(U) \subset p^k(J(p)) = J(p)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} p^k(U) \subset J(p).$$

Άρα, απ' το Πόρισμα 2.3.1, $J(p) = \mathbb{C}$ εκτός ίσως από ένα σημείο, το οποίο αντιβαίνει στο ότι το $J(p)$ είναι φραγμένο. \square

Άρα το $J(p)$ δεν μπορεί να είναι «πολύ παχύ».

Θεώρημα 2.3.3 Αν $J^\circ(R) \neq \emptyset$, τότε $J(R) = \overline{\mathbb{C}}$.

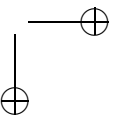
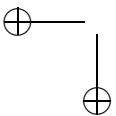
Πρόταση 2.3.2 Αν $\deg(p) \geq 2$, τότε το $J(p)$ είναι ένα τέλει σύνολο και έτσι είναι υπεραριθμησίμο.

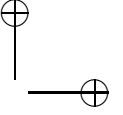
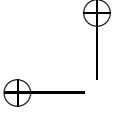
Απόδειξη. Το $J(p)$ είναι κλειστό, άρα αρκεί το ότι δεν έχει απομονωμένα σημεία. Έστω $u \in J(p)$ και έστω U μια ανοικτή περιοχή του u . Θα δείξουμε ότι το U περιέχει και άλλα σημεία του $J(p)$ εκτός του u . Υπάρχουν δύο περιπτώσεις και, επειδή $J(p) = J(p^k)$, η περίπτωση των περιοδικών σημείων μπορεί να θεωρηθεί ως περίπτωση σταθερών σημείων.

(α) Το u είναι σταθερό σημείο της p , δηλ. $p(u) = u$. Αν η $p(z) = u$ δεν έχει άλλη λύση εκτός της u τότε $u \notin J(p)$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $w \neq u$ με $p(w) = u$. Αλλά απ' το (α) του Πορίσματος 2.3.2, το U περιέχει ένα σημείο της $p^{-k}(w)$ για κάποιο $k \geq 1$. Οιοδήποτε τέτοιο σημείο βρίσκεται στο $J(p)$ λόγω όπισθεν αμεταβλησίας και είναι διαφορετικό του u , αφού $p^k(u) = u$.

(β) Το u δεν είναι σταθερό (ή περιοδικό) σημείο της p . Απ' το (α) του Πορίσματος 2.3.2, το U περιέχει ένα σημείο της $p^{-k}(u) \subset J(p)$ για κάποιο $k \geq 1$ και αυτό πρέπει να είναι διαφορετικό του u . \square

Για να αποδειχθεί η αντίστοιχη πρόταση για ρητές απεικονίσεις, απαιτείται το ακόλουθο





Λήμμα 2.3.2 Εάν $a \in J(R)$, τότε υπάρχει $b \in J(R)$ τέτοιο, ώστε $a \in O^+(b)$, αλλά $b \notin O^+(a)$.

Πρόταση 2.3.3 Αν $\deg(R) \geq 2$, τότε το $J(R)$ είναι ένα τέλειο σύνολο, οπότε είναι υπεραριθμησιμο.

2.4 Τα σύνολα Julia και τα περιοδικά σημεία

Ορισμός 2.4.1 Υποθέτουμε ότι το $\zeta \in \mathbb{C}$ είναι ένα περιοδικό σημείο περιόδου n μίας αναλυτικής συνάρτησης f και $\lambda = (f^n)'(\zeta)$. Τότε το ζ είναι:

- (α) υπερελκυστικό, αν $\lambda = 0$,
- (β) ελκυστικό, αν $0 < |\lambda| < 1$,
- (γ) απωστικό, αν $|\lambda| > 1$,
- (δ) ρητώς αδιάφορο, αν η λ είναι μία ρίζα της μονάδας,
- (ε) αρρήτως αδιάφορο, αν $|\lambda| = 1$, αλλά η λ δεν είναι μία ρίζα της μονάδας.

Ο αριθμός

$$\lambda = (f^n)'(\zeta) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(\zeta))$$

συχνά αναφέρεται και ως ιδιοτιμή της περιοδικής τροχιάς.

Θεώρημα 2.4.1 Αν $\deg(p) = n > 0$, τότε το $z = \infty$ είναι ένα υπερελκυστικό σταθερό σημείο του p .

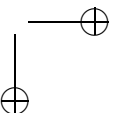
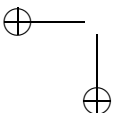
Απόδειξη. Έστω $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, όπου $a_i \in \mathbb{C}$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, n$ και $a_n \neq 0$. Τότε

$$p(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty = p^{-1}(\infty).$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό Möbius $h(z) = 1/z$. Ο h μεταφέρει το 0 στο ∞ και αντιστρόφως. Επίσης είναι 1-1 και αναλυτικός. Τότε

$$h \circ p \circ h^{-1}(z) = \frac{1}{p(1/z)} = \frac{z^n}{a_n + a_{n-1}z + \dots + a_0 z^n}.$$

Αυτή η ρητή συνάρτηση μηδενίζεται όταν $z = 0$, όπως επίσης και η παράγωγός της. Συνεπώς $p'(\infty) = 0$. \square



Ορισμός 2.4.2 Ένα σημείο z μίας απεικόνισης f λέγεται ότι είναι τελικώς περιοδικό, αν μία έμπροσθεν εικόνα αυτού είναι περιοδική, δηλαδή αν, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, το $f^n(z)$ είναι περιοδικό σημείο.

Ένα σημείο μίας απεικόνισης f λέγεται ότι είναι προπεριοδικό, αν δεν είναι περιοδικό αλλά τελικώς περιοδικό.

Θεώρημα 2.4.2 Έστω $\deg(p) \geq 2$ και υποθέτουμε ότι το p δεν έχει περιοδικά σημεία περιόδου n . Τότε $n = 2$ και το p είναι συζυγές προς το $z \mapsto z^2 - z$.

Συμβολισμός. Με $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}(p)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των απωστικών περιοδικών σημείων του πολυωνύμου p .

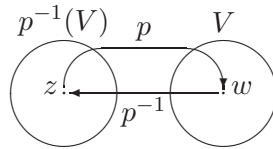
Θεώρημα 2.4.3 Για ένα πολυώνυμο $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $\deg(p) \geq 2$, $J(p) = \overline{\mathbf{\Pi}}$, δηλαδή τα απωστικά περιοδικά σημεία είναι πυκνά στο $J(p)$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $\overline{\mathbf{\Pi}} \subset J(p)$. Έστω ένα $w \in \mathbf{\Pi}$ περιόδου $p \geq 1$. Τότε το w είναι ένα απωστικό σταθερό σημείο της $g = p^k$, οπότε, απ' την Πρόταση 2.1.4, $J(p^k) = J(p) = J(g)$ και πρέπει να δείξουμε ότι η (g^n) δεν είναι φυσιολογική στο w . Υποθέτουμε ότι είναι. Τότε το w βρίσκεται σε ένα ανοικτό σύνολο V , εντός του οποίου η υπακολουθία (g^{n_i}) συγκλίνει ομοιομόρφως σε κάθε συμπαγές υποσύνολο, όχι προς το άπειρο, αφού $g^m(w) = w$ για κάθε $m = 1, 2, \dots$, αλλά προς μία πεπερασμένη αναλυτική συνάρτηση g_0 . Συμφώνως προς το Θεώρημα 1.3.1 μπορούμε να παραγωγίσουμε και παίρνουμε $(g^{n_i})'(z) \rightarrow g_0'(z)$ για κάθε $z \in V$. Αλλά, αφού $g(w) = w$, απ' τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι $|(g^{n_i})'(w)| = |(g'(w))^{n_i}| = |g'(w)|^{n_i}$, το οποίο τείνει προς το ∞ , επειδή το w είναι και απωστικό, δηλ. $|g'(w)| > 1$. Αυτό αντιφάσκει ως προς το πεπερασμένο της $g_0'(w)$, οπότε $w \in J(g) = J(p)$. Άρα $\overline{\mathbf{\Pi}} \subset J(p)$ και, επειδή το $J(p)$ είναι κλειστό, $\overline{\mathbf{\Pi}} \subset J(p)$.

Τώρα δείχνουμε ότι $J(p) \subset \overline{\mathbf{\Pi}}$. Έστω ότι

$$W = \{w \in J(p) : p(z) = w \text{ για κάποιο } z \neq w \text{ με } p'(z) \neq 0\}.$$

Άρα το W προκύπτει διαγράφοντας απ' το J εκείνα τα σημεία $w = p(z)$ για τα οποία $z \neq w$ αλλά $p'(z) = 0$. Το πλήθος αυτών των σημείων είναι πεπερασμένο και δεν υπερβαίνει το βαθμό του p . Επί πλέον, βρισκόμενο στο J , κάθε τέτοιο σημείο δεν είναι απομονωμένο λόγω της Πρότασης 2.3.2, οπότε έχει σημεία του W αρκετά κοντά και έτσι βρίσκεται στο \overline{W} . Άρα $\overline{W} = J$ και απομένει να δείξουμε ότι $\overline{W} \subset \overline{\mathbf{\Pi}}$ ή απλώς ότι $W \subset \overline{\mathbf{\Pi}}$ (αφού το $\overline{\mathbf{\Pi}}$ είναι κλειστό). Έστω ότι $w \in W$. Τότε, απ' τον ορισμό του W , υπάρχει ένα σημείο z με $p(z) = w$, $z \neq w$, $p'(z) \neq 0$. Από το ΘΑΣ 1.1.1 το p έχει μια ολόμορφη αντίστροφη p^{-1} σε κάποιο ανοικτό σύνολο V που περιέχει το w . Επειδή $z \neq w$, μπορούμε να επιλέξουμε το V τόσο μικρό, ώστε $V \cap p^{-1}(V) = \emptyset$, οπότε έχουμε $p^{-1}: V \rightarrow \mathbb{C} \setminus V$ με $p(p^{-1}(v)) = v$ για κάθε $v \in V$. Βλ. Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Επιλογή του ανοικτού συνόλου V , ώστε να μην τέμνεται με το $p^{-1}(V)$.

Γι' αυτό, η οικογένεια των συναρτήσεων

$$g_n(v) = \frac{p^n(v) - v}{p^{-1}(v) - v}, \quad v \in V$$

είναι καλώς ωρισμένη και ολόμορφη. Τώρα, το ότι $w \in \overline{\Pi}$ θα προκύψει, αν κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το w τέμνει το $\overline{\Pi}$. Έστω ότι U είναι ένα τέτοιο ανοικτό σύνολο με $U \subset V$. Αφού $w \in J$, η οικογένεια (p^n) , άρα και η (g_n) , δεν είναι φυσιολογική στο U (σημειώστε ότι ο παρονομαστής της g_n δε μεταβάλλεται με το n). Από το Θεώρημα του Montel 1.5.1, η $g_n(v)$ πρέπει να παίρνει τις τιμές 0 ή 1 για κάποιο n και κάποιο $v \in U$. Στην πρώτη περίπτωση $p^n(v) = v$ για κάποιο $v \in U$, ενώ στη δεύτερη $p^n(v) = p^{-1}(v)$, οπότε $p^{n+1}(v) = v$ για κάποιο $v \in U$. Άρα το U περιέχει κάποιο περιοδικό σημείο. Αυτό είναι απωστικό, διότι κανένα σημείο στο V δεν απεικονίζεται όπισθεν εντός του V μέσω της p , αφού $V \cap p^{-1}(V) = \emptyset$. Έπεται τώρα ότι $w \in \overline{\Pi}$, αφού το w ήταν ένα αυθαίρετο σημείο του W . \square
Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι κάτι ανάλογο ισχύει και για τις ρητές απεικονίσεις.

Θεώρημα 2.4.4 Έστω R μία ρητή απεικόνιση βαθμού d , όπου $d \geq 2$. Τότε

$$J = \{\text{περιοδικά σημεία της } P\}',$$

δηλ. J είναι το παραγόμενο από τα περιοδικά σημεία της R σύνολο.

Ορισμός 2.4.3 Ομοκλινικό προς ένα απωστικό σταθερό σημείο z_0 είναι εκείνο το σημείο z για το οποίο υπάρχει $n > 0$, ώστε $f^n(z) = z_0$ και για το οποίο υπάρχει μία ακολουθία αντίστροφων εικόνων $f^{-i}(z)$ συγκλινουσών προς το z_0 .

Πόρισμα 2.4.1 Κάθε απωστικό περιοδικό σημείο του P επιδέχεται ομοκλινικά σημεία. Επί πλέον, τα ομοκλινικά σημεία είναι πυκνά στο $J(P)$.

Ορισμός 2.4.4 Μία συνάρτηση f είναι τοπικώς τελικώς επί του $J(f)$, αν, για κάθε ανοικτό σύνολο U με $U \cap J(f) \neq \emptyset$, υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ με $f^n(U \cap J(f)) = J(f)$.

Πόρισμα 2.4.2 Αν D είναι οιοδήποτε ανοικτό σύνολο τέτοιο, ώστε $D \cap J \neq \emptyset$, τότε υπάρχει ένα $N \in \mathbb{Z}$ τέτοιο, ώστε $J = R^N(D \cap J)$.

Ορισμός 2.4.5 Έστω $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ μία συνάρτηση. Αν a είναι ένα (υπερ)ελκυστικό περιοδικό σημείο της f περιόδου p , γράφουμε

$$A(a) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(z) = a\}$$

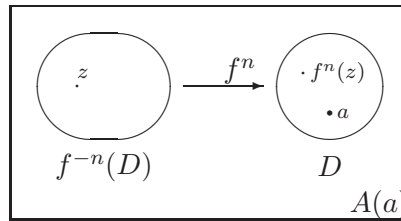
για τη λεκάνη έλξης του a , δηλαδή λεκάνη έλξης είναι το σύνολο των σημείων τα οποία προσεγγίζουν μία δοθείσα (υπερ)ελκυστική περιοδική τροχιά.

Παρατηρήσεις 2.4.1 Προφανώς, $O^-(a) \subset A(a)$ και $A(a) \neq \emptyset$, διότι $a \in A(a)$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν a είναι ένα ελκυστικό σταθερό σημείο της f , τότε $f^k(z) \in A(a)$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ επάγει ότι $z \in A(a)$.

Αν μία λεκάνη έλξης δεν είναι συνεκτική, συνήθως θεωρούμε την άμεση λεκάνη έλξης, $A^*(a)$, του a , η οποία είναι η συνεκτική συνιστώσα της $A(a)$ που περιέχει το a .

Θεώρημα 2.4.5 Μία λεκάνη έλξης είναι ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη. Αφού το a είναι ελκυστικό, όλα τα σημεία, εντός μιας αρκετά μικρής απόστασης r από το a , θα συγκλίνουν προς το a υπό επαναλαμβανόμενες εφαρμογές της f . Με άλλα λόγια, έχουμε ότι $a \in D \subset A(a)$ για έναν μικρό ανοικτό δίσκο D . Αν $a = \infty$, μπορούμε να πάρουμε $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ για αρκετά μεγάλο r .

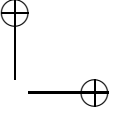
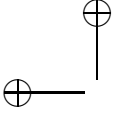


Σχήμα 2.3: Το $A(a)$ είναι ανοικτό σύνολο.

Έστω $z \in A(a)$. Πρέπει να δείξουμε ότι το z βρίσκεται μέσα σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο $A(a)$. Αλλά $f^n(z) \in D$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, οπότε $z \in f^{-n}(D)$, διότι $\{z\} \subset f^{-n}(f^n(z)) \subset f^{-n}(D)$, το οποίο είναι ανοικτό λόγω συνέχειας της f και βρίσκεται στο $A(a)$, επειδή και το D βρίσκεται εκεί. \square

Πόρισμα 2.4.3 Μία άμεση λεκάνη έλξης είναι ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη. Αφού το $A(a)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\overline{\mathbb{C}}$ και $A^*(a)$ είναι συνεκτική συνιστώσα του $A(a)$, τότε το $A^*(a)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\overline{\mathbb{C}}$. \square



Θεώρημα 2.4.6 Αν το $p(z)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n , τότε $A^*(\infty) = A(\infty)$.

Λήμμα 2.4.1 Έστω a ένα (υπερ)ελκυστικό σταθερό σημείο του p . Τότε $\partial A(a) = J(p)$.

Λήμμα 2.4.2 $A(a) \subset F(p)$.

Ορισμός 2.4.6 Έστω ότι $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ είναι μία συνάρτηση. Το γεμισμένο σύνολο Julia, $K(f)$, της f είναι το σύνολο των σημείων των οποίων οι τροχιές δεν τείνουν στο άπειρο, δηλ.,

$$\begin{aligned} K(f) &= \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) \neq \infty\} \\ &= \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \text{το } \{|f^n(z)|\}_{n=0}^\infty \text{ είναι φραγμένο}\} \\ &= \overline{\mathbb{C}} \setminus A(\infty). \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι το $\partial K(f) = J(f)$. Το γεμισμένο σύνολο Julia αποτελεί παράδειγμα συνόλου, το οποίο ορίζεται στον δυναμικό χώρο.

2.5 Συζυγίες αναλυτικών συναρτήσεων στη σφαίρα Riemann

Το πρώτο έναυσμα για συζυγίες στη Μιγαδική Ανάλυση δίνεται από το Λήμμα του Schwarz.

Λήμμα 2.5.1 (Schwarz) Έστω η $f: D(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη, ώστε $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $z \in D(0,1)$ και $f(0) = 0$. Τότε $|f'(0)| \leq 1$ και $|f(z)| \leq |z|$ για κάθε $z \in D(0,1)$. Επίσης, αν $|f'(0)| = 1$ ή αν $|f(z_0)| = |z_0|$ για κάποιο $z_0 \in D(0,1)$ με $z_0 \neq 0$, τότε $f(z) = cz$ για κάθε $z \in D(0,1)$, όπου c είναι μια σταθερά με $|c| = 1$.

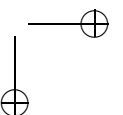
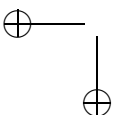
Με άλλα λόγια το Λήμμα του Schwarz αναφέρει ότι μια αναλυτική συνάρτηση, η οποία έχει το 0 ως σταθερό σημείο, πρέπει είτε να έχει το 0 ως ελκυστικό σταθερό σημείο ή να είναι περιστροφή, δηλ. το 0 να είναι ουδέτερο σταθερό σημείο.

2.5.1 Η ελκυστική/απωστική περίπτωση

Θεώρημα 2.5.1 Έστωσαν $R: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ αναλυτική, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ ελκυστικό ή απωστικό περιοδικό σημείο περιόδου n και $\lambda = (R^n)'(z_0)$ με $|\lambda| \neq 1$. Τότε υπάρχουν μια ανοικτή περιοχή U του z_0 και ένας μοναδικός αναλυτικός ομοιομορφισμός $\phi: U \rightarrow D(0,r)$ για κάποιο $r > 0$ τέτοιος, ώστε $\phi(z_0) = 0$, $\phi'(z_0) = 1$ και το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{R^n} & U \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ D(0,r) & \xrightarrow{z \mapsto \lambda z} & D(0,r) \end{array}$$

να αντιμετωπίζεται.



2.5.2 Η υπερελκυστική περίπτωση

Θεώρημα 2.5.2 Έστωσαν $R: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ αναλυτική, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ υπερελκυστικό περιодικό σημείο περιόδου n και $k \geq 2$ ακέραιος τέτοιος, ώστε

$$(R^n)'(z_0) = (R^n)''(z_0) = \dots = (R^n)^{(k-1)}(z_0) = 0$$

και

$$(R^n)^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Τότε υπάρχουν μια ανοικτή περιοχή U του z_0 και ένας αναλυτικός ομοιομορφισμός $\phi: U \rightarrow D(0, r)$ για κάποιο $r > 0$ τέτοιος, ώστε $\phi(z_0) = 0$, $\phi'(z_0) = 1$ και το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{R^n} & U \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ D(0, r) & \xrightarrow{z \mapsto z^k} & D(0, r) \end{array}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

2.5.3 Η ουδέτερη περίπτωση

Η τοπική δυναμική σε μια περιοχή ενός ουδέτερου περιодικού σημείου δεν είναι τόσο εύκολο να περιγραφεί. Υπάρχουν πολλά ανοικτά ερωτήματα σχετικά με την περίπτωση αυτή.

Έστω $R: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ αναλυτική, $\deg(R) > 1$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ ουδέτερο σταθερό σημείο και $\lambda = R'(z_0)$, $|\lambda| = 1$. Αν προσπαθήσουμε να συζεύξουμε την $R|_U$ με την παράγωγό της, το διάγραμμα

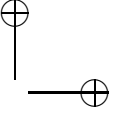
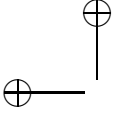
$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{R} & U \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ D(0, r) & \xrightarrow{z \mapsto \lambda z} & D(0, r) \end{array}$$

επιφέρει τη συναρτησιακή εξίσωση

$$\phi \circ R(z) = \lambda \phi(z),$$

για κάθε $z \in U$. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται *συναρτησιακή εξίσωση Schröder*, ή ΣΕΣ χάριν συντομίας και αποτελεί μια αναγκαία συνθήκη για την (τοπική) συζυγία της R με την $z \mapsto \lambda z$. Γεωμετρικώς, η συναρτησιακή εξίσωση Schröder λέει ότι το z_0 είναι το κέντρο ενός δίσκου επί του οποίου η συνάρτηση γίνεται περιστροφή.

Πρόταση 2.5.1 Αν το λ είναι ρίζα της μονάδας, τότε η ΣΕΣ δεν έχει λύση.



Θεώρημα 2.5.3 (Camacho) Έστω $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ μια αναλυτική, γύρω από το 0, απεικόνιση. Αν $\lambda^n = 1$ και $\lambda^m \neq 1$ για $1 \leq m < n$, τότε είτε $f^n = I$ ή υπάρχει ένας τοπικός ομοιομορφισμός h και ένας ακέραιος $k \geq 1$ τέτοιος, ώστε $h(0) = 0$ και $h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z(1 + z^{kn})$.

Θεώρημα 2.5.4 (Θεώρημα του άνθους) Έστω $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ μια αναλυτική, γύρω από το 0, απεικόνιση και υποθέτουμε ότι $\lambda^n = 1$ και $\lambda^m \neq 1$ για $1 \leq m < n$. Αν $f^n \neq I$, υπάρχουν, ένας ακέραιος k και nk αναλυτικές καμπύλες ανά δύο εφαπτόμενες στην αρχή, οι οποίες φράζουν κάποια πέταλα. Έτσι, σχηματίζεται ένα άνθος A με κέντρο την αρχή και γύρω του nk πέταλα Π_j ($A = \cup_{j=1}^{nk} \Pi_j$) έτσι, ώστε

(i) $f^n(A) \subset A$,

(ii) $f^p(z) \rightarrow 0$, καθώς $p \rightarrow +\infty$ για κάθε $z \in A$, εφαπτομενικώς ως προς τον άξονα του πετάλου,

(iii) $f^p(B) \rightarrow 0$, καθώς $p \rightarrow +\infty$, ομοιομόρφως για κάθε συμπαγές $B \subset \Pi_j$.

Θεώρημα 2.5.5 (Siegel) Έστω $R: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ αναλυτική, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ ουδέτερο σταθερό σημείο και $\lambda = R'(z_0) = e^{2\pi i \theta}$ ($|\lambda| = 1$). Αν $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και υπάρχουν θετικές σταθερές a, b τέτοιες, ώστε

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{a}{q^b}$$

για κάθε $p, q \in \mathbb{Z}$ με $q \geq 1$, τότε η ΣΕΣ έχει λύση.

2.6 Ταξινόμηση κατά Sullivan των συνόλων Fatou

Ο D. Sullivan, το 1982, ολοκλήρωσε την ταξινόμηση των δυναμικών ιδιοτήτων μιας ρητής απεικόνισης πάνω στο σύνολό της Fatou, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των σχεδόν συμμόρφων απεικονίσεων (ιδίως το Θεώρημα της μετρήσιμης απεικόνισης Riemann των Morrey, Ahlfors και Bers).

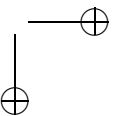
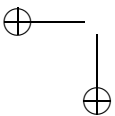
Ως συνήθως, η R είναι μία ρητή απεικόνιση βαθμού τουλάχιστον δύο.

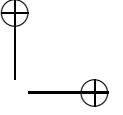
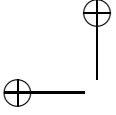
Θεώρημα 2.6.1 (Sullivan) Όλες οι συνεκτικές συνιστώσες του συνόλου Fatou της αναλυτικής R είναι προπεριοδικές. Επί πλέον, υπάρχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος περιοδικών συνιστωσών.

Ορισμός 2.6.1 Μία έμπροσθεν αναλλοίωτη συνεκτική συνιστώσα F_0 του F είναι:

(α) ελκυστική, αν περιέχει ένα ελκυστικό σταθερό σημείο της R .

(β) υπερελκυστική, αν περιέχει ένα υπερελκυστικό σταθερό σημείο της R .





- (γ) παραβολική (ή τόπος Leau), αν υπάρχει ένα ρητώς αδιάφορο σταθερό σημείο z της R στο σύνορο της F_0 και αν $R^n \rightarrow z$ στο F_0 , καθώς $n \rightarrow \infty$.
- (δ) δίσκος Siegel, αν η $R: F_0 \rightarrow F_0$ είναι αναλυτικώς συζυγής προς μία ευκλείδεια (άρρητη) περιστροφή του ανοικτού μοναδιαίου δίσκου (ή ενός απλώς συνεκτικού συνόλου) επί του εαυτού του.
- (ε) δακτύλιος Herman, αν η F_0 είναι συμμόρφως ισοδύναμη προς ένα δακτύλιο και η $R: F_0 \rightarrow F_0$ είναι αναλυτικώς συζυγής προς μία ευκλείδεια περιστροφή του δακτυλίου επί του εαυτού του.

Οι δίσκοι Siegel και οι δακτύλιοι Herman αναφέρονται συνήθως και ως τόποι περιστροφής.

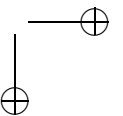
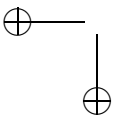
Παρατηρήσεις 2.6.1

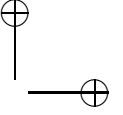
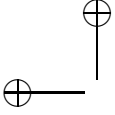
(α) Εφ' όσον $\deg(R) \geq 2$ και η R είναι αναλυτική, η $R|_{F_0}$ δεν θα μπορούσε ποτέ να είναι συζυγής προς μία περιστροφή $z \mapsto e^{i\theta}z$, όπου θ ρητός.

(β) Φυσικά, στα (δ) και (ε), οι περιστροφές έχουν απαραίτητως άπειρη τάξη διότι, διαφορετικά, κάποια R^n θα ήταν η ταυτοτική και τότε $\deg(R) = 1$.

Θεώρημα 2.6.2 (Sullivan) Έστω D η συνεκτική συνιστώσα του συνόλου Fatou της αναλυτικής R τέτοια, ώστε $R(D) = D$. Τότε η D είναι ενός, από τα προηγούμενα πέντε, είδους.

Για περαιτέρω εμβάθυνση επί του αντικειμένου παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στις πρόσφατες εργασίες [1] και [13] καθώς και στα [114] και [12].





Κεφάλαιο 3

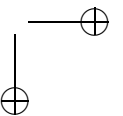
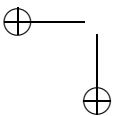
Κρίσιμα σημεία

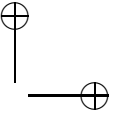
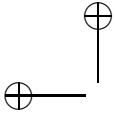
Οι έμπροσθεν τροχιές των κρίσιμων σημείων μιας ρητής ή πολυωνυμικής απεικόνισης καθορίζουν τα γενικά χαρακτηριστικά της ολικής δυναμικής της. Η τιμή w είναι κρίσιμη τιμή μιας συνάρτησης f , αν η εξίσωση $f(z) = w$ έχει λύση της οποίας η πολλαπλότητα είναι μεγαλύτερη της μονάδας. Μία τέτοια λύση c καλείται κρίσιμο σημείο. Χρησιμοποιώντας τοπικές συντεταγμένες και εφ' όσον η f είναι αναλυτική αυτό είναι ισοδύναμο με τη συνθήκη $f'(c) = 0$ (τουλάχιστον όταν $c \neq \infty$). Ο ρόλος των κρίσιμων σημείων κατά την επανάληψη μιας συνάρτησης επισημαίνεται στην [80]. Η [39] ασχολείται επίσης με τη δυναμική ρητών απεικονίσεων.

3.1 Φυσιολογικότητα των αντιστρόφων απεικονίσεων

Θεώρημα 3.1.1 Έστω R μια ρητή απεικόνιση με $\deg(R) \geq 2$ και υποθέτουμε ότι η οικογένεια $\{S_n : n \geq 1\}$ είναι τέτοια, ώστε κάθε S_n είναι ένας αναλυτικός κλάδος απλής τιμής κάποιας $(R^m)^{-1}$ σε ένα ανοικτό D . Τότε η $\{S_n : n \geq 1\}$ είναι φυσιολογική στο D .

Απόδειξη. Έστω ότι $p \in D$ και θεωρούμε την $R(p) = p$. Καθώς το p δεν είναι κρίσιμη τιμή της R και $\deg \geq 2$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία στην $R^{-1}(p)$, έστω p και p_1 με $p \neq p_1$. Ομοίως για την $R^{-1}(p_1)$ και επιλέγουμε ένα διαφορετικό του p_1 , έστω p_2 . Τότε και $p_2 \neq p$. Άρα υπάρχει ένας κύκλος της R , ο οποίος περιέχει τουλάχιστον τρία σημεία (διαφορετικά μεταξύ τους). Παίρνουμε δύο διάζευκτους κύκλους A και B της R με τον καθ' ένα να περιέχει τουλάχιστον τρία σημεία. Τώρα, η S_n δεν μπορεί να απεικονίζει οιοδήποτε σημείο z του $D \setminus A$ στο A (διαφορετικά, για κάποιο m , το $z = R^m S_n(z) \in A$), οπότε, από το Θεώρημα 1.5.3, η $\{S_n : n \geq 1\}$ είναι φυσιολογική στο $D \setminus A$. Το ίδιο επιχείρημα ισχύει για το B , έτσι η (S_n) είναι φυσιολογική στην ένωση $(D \setminus A) \cup (D \setminus B) = D$. \square





3.2 Κρίσιμα σημεία και περιοδικοί τόποι

Ορισμός 3.2.1 Ένα σημείο z είναι κρίσιμο σημείο μίας απεικόνισης R , αν η R αποτυγχάνει να είναι 1-1 σε κάθε περιοχή του z , δηλ. αν δεν είναι τοπικώς 1-1. Μία τιμή w είναι κρίσιμη τιμή της R , αν είναι η εικόνα κάποιου κρίσιμου σημείου, δηλ. αν $w = R(z)$ για κάποιο κρίσιμο σημείο z .

Συμβολισμός. Το σύνολο C θα συμβολίζει το σύνολο όλων των κρίσιμων σημείων της R και με C^+ θα συμβολίζουμε τις έμπροσθεν εικόνες του C : άρα

$$C^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(C).$$

Από τη σχέση των Riemann–Hurwitz έχουμε το εξής

Πόρισμα 3.2.1 Μία ρητή απεικόνιση θετικού βαθμού d έχει το πολύ $2d - 2$ διαφορετικά κρίσιμα σημεία στο $\overline{\mathbb{C}}$. Ένα πολυώνυμο θετικού βαθμού d έχει το πολύ $d - 1$ διαφορετικά κρίσιμα σημεία στο \mathbb{C} .

Θεώρημα 3.2.1 Αν το p είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n \geq 2$, τότε το $z = \infty$ είναι ένα κρίσιμο σημείο του p τάξης $d - 1$.

Ο βασικότερος λόγος για τον οποίο μελετούμε τις ξεχωριστές αυτές τροχιές των κρίσιμων σημείων, βρίσκεται στο ακόλουθο Θεώρημα του Fatou:

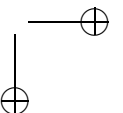
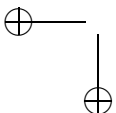
Θεώρημα 3.2.2 Αν η R είναι μια ρητή συνάρτηση έχουσα έναν ελκυστικό κύκλο, τότε τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο θα συγκλίνει προς αυτόν.

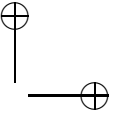
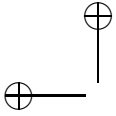
Μεταξύ των κρίσιμων σημείων μιας ρητής επαναληπτικής μεθόδου R , η οποία χρησιμοποιείται για την εύρεση των ριζών μιας συνάρτησης f , είναι και οι ρίζες, z_i^* , της f , οι οποίες είναι επίσης ελκυστικά σταθερά σημεία της R . Προφανώς, αυτά τα σημεία δεν είναι ελεύθερα να συγκλίνουν προς οιοσδήποτε άλλους ελκυστικούς κύκλους. Παρά ταύτα, είναι διαθέσιμες άλλες ρίζες τις οποίες θα ονομάζουμε ελεύθερα κρίσιμα σημεία.

Πόρισμα 3.2.2 Το πλήθος των ελκυστικών περιοδικών τροχιών είναι το πολύ $2d - 2 = 2(d - 1)$.

Ο Shishikura, το 1987, απέδειξε κάτι ισχυρότερο.

Θεώρημα 3.2.3 Μία ρητή απεικόνιση R βαθμού $d \geq 2$ έχει το πολύ $2d - 2$ μη απωστικούς κύκλους.





Τώρα μπορεί να αποδείξει κανείς το ανάλογο του Θεωρήματος 2.4.3 για ρητές απεικονίσεις.

Θεώρημα 3.2.4 $J(R) = \overline{\{\text{απωστικά περιοδικά σημεία της } P\}}$.

Θεώρημα 3.2.5 Έστω R μία ρητή απεικόνιση βαθμού d , όπου $d \geq 2$ και έστω K ένα κλειστό υποσύνολο του $\overline{\mathbb{C}}$ τέτοιο, ώστε $K \cap E(R) = \emptyset$, δηλ. το K δεν περιέχει κανένα εξαιρετικό σημείο της R . Αν $z \in J$, τότε, για κάθε ανοικτή περιοχή U του z , δηλ. για $U \cap J \neq \emptyset$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $R^n(U) \supset K$.

Απόδειξη. Καθώς $U \cap J \neq \emptyset$, υπάρχει $z \in U \cap J$. Επειδή $z \in J$, λόγω του προηγούμενου θεωρήματος μπορούμε να πούμε ότι το z είναι ένα απωστικό περιοδικό σημείο περιόδου p και επειδή $z \in U$, υπάρχει μία περιοχή V του z με $z \in V \subset U$. Αφού το z είναι απωστικό, $R^p(V) \supset V$. Έτσι

$$V \subset R^p(V) \subset R^{2p}(V) \subset \dots \subset R^{np}(V) \dots$$

Αφού $K \cap E(R) = \emptyset$ και $z \in J$,

$$K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E(R) = \overline{\mathbb{C}} \setminus E(R^p) = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^{np}(V).$$

Το K όμως είναι και συμπαγές, ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $\overline{\mathbb{C}}$, οπότε καθώς τα σύνολα στα δεξιά αποτελούν ένα ανοικτό κάλυμμα του K , υπάρχει ένας αέρας N με $K \subset R^N(V)$ και αν $n \geq n_0$ έχουμε

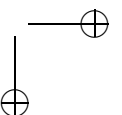
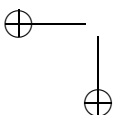
$$K \subset R^N(V) \subset \dots \subset R^{n-N}R^N(V) = R^n(V) \subset R^n(U),$$

όπως απαιτείτο. \square

3.3 Μονοπαραμετρικές οικογένειες

Η επίλυση μιας εξίσωσης, η οποία εκφράζει τις ρίζες της μέσω ενός συνδυασμού ρητών πράξεων και εξαγωγής ριζών ονομάζεται *αλγεβρική επίλυση* ή *επίλυση μέσω ριζικών*. Ο δευτεροβάθμιος τύπος ήταν γνωστός στους βαβυλώνιους· λύσεις κυβικών και τεταρτοβαθμίων πολυωνύμων μέσω ριζικών δόθηκαν από τους Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardan και Ferrari στα μέσα του 1500 (πρβ. το Παράρτημα Α').

Παράδειγμα 3.3.1 (Μετατροπή δευτεροβαθμίων πολυωνύμων) Θα δείξουμε, πως ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο $q(z) = az^2 + 2bz + d$ ($a \neq 0$), όπου $a, b, d \in \mathbb{C}$ μπορεί να απλοποιηθεί μέσω μίας γραμμικής αλλαγής συντεταγμένων



$w = \Phi(z) = az + b$ ($a \neq 0$) προς τη μορφή $p_c(z) = z^2 + c$, όπου $c = ad - b^2 + b$. Έχουμε δηλαδή το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{q} & \overline{\mathbb{C}} \\ \Phi^{-1} \uparrow & & \downarrow \Phi \\ \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{p_c} & \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

όπου Φ είναι βεβαίως ο μετασχηματισμός Möbius που προαναφέραμε. Επομένως

$$\begin{aligned} p(w) &= \Phi \circ q \circ \Phi^{-1}(w) = \Phi \circ q \left(\frac{w-b}{a} \right) = \Phi \left(a \left(\frac{w-b}{a} \right)^2 + 2b \left(\frac{w-b}{a} \right) + d \right) \\ &= \Phi \left(\frac{1}{a}(w^2 - 2bw + b^2 + 2bw - 2b^2 + ad) \right) = \Phi \left(\frac{1}{a}(w^2 - b^2 + ad) \right) \\ &= w^2 - b^2 + ad + b = w^2 + c, \end{aligned}$$

όπου $c = ad - b^2 + b$.

Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι για να κατανοήσουμε τη δυναμική όλων των δευτεροβαθμίων πολυωνύμων, χρειάζεται να μελετήσουμε μόνο την κλάση των δευτεροβαθμίων πολυωνύμων της μορφής $z \mapsto z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$.

Από το Θεώρημα 2.4.1 έχουμε ότι το p_c είναι τοπικώς αναλυτικώς συζυγές με την $z \mapsto z^2$ γύρω από το ∞ . Επομένως υπάρχουν μια περιοχή U του ∞ στην $\overline{\mathbb{C}}$, $r \geq 1$ και ένας αναλυτικός ομοιομορφισμός $\phi_c: U \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus D(0, r)$ έτσι, ώστε $\phi_c(\infty) = \infty$ και το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{p_c} & U \\ \phi_c \downarrow & & \downarrow \phi_c \\ \overline{\mathbb{C}} \setminus D(0, r) & \xrightarrow{z \mapsto z^2} & \overline{\mathbb{C}} \setminus D(0, r) \end{array}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Άρα $\phi_c(p_c(z)) = [\phi_c(z)]^2$ ή $p_c(z) = \phi_c^{-1}([\phi_c(z)]^2)$, $z \in U$. Για z κοντά στο ∞ , δηλαδή για $|z| \geq 1 + |c|$,

$$\phi_c(z) = z \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{[p_c^k(z)]^2} \right)^{\frac{1}{2^{k+1}}},$$

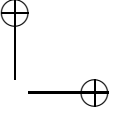
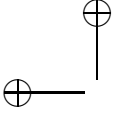
όπου

$$\left(1 + \frac{c}{[p_c^k(z)]^2} \right)^{\frac{1}{2^{k+1}}} = 1,$$

είναι η διακλάδωση της 2^{k+1} -οστής ρίζας της μονάδας.

Είδαμε προηγουμένως ότι κάθε μιγαδικό δευτεροβάθμιο πολυώνυμο μπορεί να αναχθεί στη μορφή

$$p_c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C} \quad (3.1)$$



μέσω μιας γραμμικής αλλαγής συντεταγμένων. Το μοναδικό κρίσιμο σημείο του είναι το 0.

Αν δύο κυβικά πολυώνυμα έχουν ρίζες που σχηματίζουν όμοια τρίγωνα, η συσχετισμένη απεικόνιση που στέλνει τις ρίζες του ενός προς τις ρίζες του άλλου, συζευγνύει τις επαναληπτικές τους μεθόδους. Οιοδήποτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού μπορεί να αναχθεί στη μορφή $p(z) = z^3 + Az - B$. Αν απαιτήσουμε $p(1) = 0$, έχουμε ότι $A = B - 1$ εφ' όσον $A \neq 0 \neq B$. Επομένως, η οικογένεια

$$p_\lambda(z) = z^3 + (\lambda - 1)z - \lambda = (z - 1)(z^2 + z + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (3.2)$$

της οποίας οι ρίζες είναι οι $z_1^* = 1$, $z_2^* = (-1 + \sqrt{1 - 4\lambda})/2$ και $z_3^* = (-1 - \sqrt{1 - 4\lambda})/2$, περιέχει όλα τα κυβικά πολυώνυμα με εμφανείς ρίζες, εκτός από τα z^3 και $z^3 - z^2$ με 0 ως πρώτη εμφανής ρίζα. Σημειώστε την εξάρτηση των z_2^* και z_3^* από το λ . Τα πολυώνυμα p_λ είναι εκείνα τα κυβικά πολυώνυμα με μεγιστοβάθμιο συντελεστή μονάδα, των οποίων οι ρίζες αθροίζονται στο μηδέν και που έχουν ως ρίζα το 1. Τα κρίσιμα σημεία του p_λ είναι τα $\pm\sqrt{(1 - \lambda)}/3$. Περισσότερες λεπτομέρειες για τη δυναμική συμπεριφορά των κυβικών πολυωνύμων υπάρχουν στις [27] και [28].

Αφού οι ρίζες δύο τεταρτοβαθμίων γενικώς δεν σχετίζονται με κάποιο μετασχηματισμό Möbius (πρέπει να συμφωνεί ο μη αρμονικός λόγος των ριζών), δεν υπάρχει μια γενική μονοπαραμετρική οικογένεια τεταρτοβαθμίων πολυωνύμων.

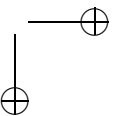
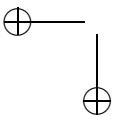
3.4 Σύνολα Julia δευτεροβαθμίων πολυωνύμων

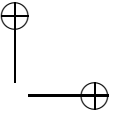
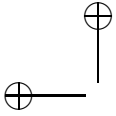
Σε όλα τα επόμενα, $p_c(z) = z^2 + c$, όπου $z, c \in \mathbb{C}$, $J(p_c) = J_c$ και $K(p_c) = K_c$.

Θεώρημα 3.4.1 *Το p_c έχει το πολύ ένα πεπερασμένο ελκυστικό σταθερό σημείο ή ελκυστικό κύκλο.*

Απόδειξη. Μπορεί να αποδειχθεί αυτονόμως, οπότε βλ. [90]. Μια έμμεση απόδειξη είναι η εξής: Έχει αποδειχθεί ότι αν $a \neq \infty$ είναι ένα ελκυστικό περιοδικό σημείο σημείο ενός πολυωνύμου p , τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο z τέτοιο, ώστε το $p^k(z)$ έλκεται προς την περιοδική τροχιά που περιέχει το a . Αφού το μόνο κρίσιμο σημείο του p_c είναι το 0, το p_c πρέπει να έχει το πολύ μία ελκυστική περιοδική τροχιά. \square

Παράδειγμα 3.4.1 Ισχυριζόμαστε ότι το $p_c(z) = z^2 + c$ έχει τουλάχιστον ένα απωστικό σταθερό σημείο, εκτός εάν το $c = 1/4$, διότι, μία ρίζα $a = (1/2)(1 \pm \sqrt{1 - 4c})$ της εξίσωσης $f(z) = z$ έχει ιδιοτιμή λ με $|\lambda| = 2|a| = |1 \pm \sqrt{1 - 4c}|$. Παίρνοντας τη θετική τετραγωνική ρίζα βρίσκουμε ότι $|\lambda| > 1$ εκτός εάν $1 - 4c = 0 \Leftrightarrow c = 1/4$, όπου και οι δύο ρίζες είναι ίσες με $1/2$ έχοντας ιδιοτιμή 1.





Αποδεικνύουμε τώρα ότι το αδιάφορο σταθερό σημείο $1/2$ της $f(z) = z^2 + 1/4$ βρίσκεται στο $J = \partial A(\infty)$. Για κάθε μικρό $\delta > 0$,

$$f(1/2 + d) = (1/2 + d)^2 + 1/4 = 1/4 + d^2 + d + 1/4 = d^2 + d + 1/2 > 1 + d/2$$

και $f^n(1/2 + d) \geq (1 + d/2)^n$ και έτσι το $1/2$ έχει σημεία της $A(\infty)$ αρκετά κοντά, οπότε το $1/2 \in A(\infty)$. Αλλά αφού το $1/2 \notin A(\infty)$ έχουμε ότι $1/2 \in A(\infty) \setminus A(\infty) = \partial A(\infty) = J$.

Θεώρημα 3.4.2 Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} p_c^n(0) \neq \infty$, τότε το J_c είναι συνεκτικό.

Απόδειξη. Βλ. [67], [90]. \square

Θεώρημα 3.4.3 Αν $|c| < 1/4$, τότε το J_c είναι μία απλή κλειστή καμπύλη αλλά δεν έχει καλώς ωρισμένη εφαπτόμενη ευθεία.

Η συνθήκη $|c| < 1/4$ μπορεί να χαλαρώσει κάπως. Αυτό που θέλουμε είναι το p_c να έχει ένα ελκυστικό σταθερό σημείο.

Λήμμα 3.4.1 Αν $|c| < 1/4$, τότε το p_c έχει ένα ελκυστικό σταθερό σημείο.

Θεώρημα 3.4.4 Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} p_c^n(0) = \infty$, τότε το J_c είναι ολικά ασύνδετο.

Θεώρημα 3.4.5 Αν $|c| > 1/4(5 + 2\sqrt{6})$, τότε το J_c είναι ολικά ασύνδετο.

3.5 Το σύνολο Mandelbrot

Η διχοτόμηση μεταξύ των τιμών της παραμέτρου c του δευτεροβαθμίου πολυωνύμου p_c για τις οποίες συνεπάγεται είτε συνεκτικότητα είτε ολική μη συνεκτικότητα του συνόλου J_c , μελετήθηκε από τον Mandelbrot.

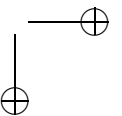
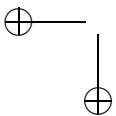
Ορισμός 3.5.1 Το σύνολο $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \text{το } J_c \text{ είναι συνεκτικό}\}$ ονομάζεται σύνολο Mandelbrot.

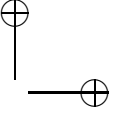
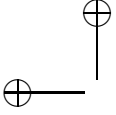
Αυτό είναι και το πρώτο σύνολο, το οποίο ορίζουμε σε έναν παραμετρικό χώρο. Για κάθε σημείο $c \in \mathcal{M}$ έχουμε ένα διαφορετικό δυναμικό σύστημα.

Η απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος βρίσκεται στην [29] και αποτελεί τη βάση της ΜΣΣ (βλ. Κεφάλαιο 7) για την κατασκευή εικόνων του \mathcal{M} .

Θεώρημα 3.5.1

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{c \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} p_c^n(0) \neq \infty\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} : \text{το } \{p_c^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ είναι φραγμένο}\}. \end{aligned}$$





Θεώρημα 3.5.2 (Douady–Hubbard) Το σύνολο \mathcal{M} είναι συνεκτικό.

Απόδειξη. Βλ. [54]. \square

Το κύριο σημείο στην απόδειξη των Douady και Hubbard είναι να αποδειχθεί πως η απεικόνιση

$$\Phi: \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus D(0,1), \quad \Phi(c) = \phi_c(c),$$

είναι ένας σύμμορφος ομοιομορφισμός. Σημαντικό ρόλο στην ανάλυση των Douady και Hubbard παίζουν οι επεκτάσεις των απεικονίσεων Riemann, οι οποίες αποτελούν ένα κλασσικό τμήμα της Μιγαδικής Ανάλυσης.

Ορισμός 3.5.2 Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται τοπικώς συνεκτικός σε ένα σημείο $x \in X$, αν, δοθέντος V ανοικτού με $x \in V$, υπάρχουν ένα ανοικτό U και ένα συνεκτικό σύνολο W τέτοια, ώστε $x \in U \subset W \subset V$. Ο X καλείται τοπικώς συνεκτικός, αν είναι τοπικώς συνεκτικός σε κάθε σημείο του.

Θεώρημα 3.5.3 Ο X είναι τοπικώς συνεκτικός, αν οι συνεκτικές συνιστώσες των ανοικτών υποσυνόλων του είναι ανοικτές στο X .

Σχετικά με τις επεκτάσεις των απεικονίσεων Riemann, ο Καραθεοδωρής απέδειξε το ακόλουθο τοπολογικό κριτήριο ύπαρξης μιας τέτοιας επέκτασης.

Θεώρημα 3.5.4 (Καραθεοδωρή) Έστω ότι $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ απλώς συνεκτικό και $f: D \rightarrow D(0,1)$ σύμμορφος αυτομορφισμός. Το σύνορο, ∂D , του D είναι τοπικώς συνεκτικό τότε και μόνο, αν η f^{-1} επεκτείνεται σε μια συνεχή απεικόνιση $g: \overline{D}(0,1) \rightarrow \overline{D}$.

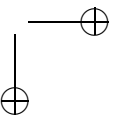
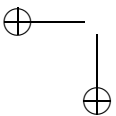
Για τη διερεύνηση της τοπικής συνεκτικότητας του J_c ή του \mathcal{M} , οι Douady και Hubbard όρισαν πρώτα τα ακτινικά όρια ως εξής:

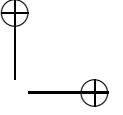
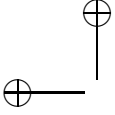
Ορισμός 3.5.3 Έστω $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ απλώς συνεκτικό, $z_0 \in D(0,1)$ και $f: D \rightarrow D(0,1)$ σύμμορφος αυτομορφισμός με $f(z_0) = 0$ και $f'(z_0) > 0$. Το ακτινικό τόξο γωνίας θ ορίζεται ως η καμπύλη $f^{-1}(re^{2\pi i\theta})$ για $0 \leq r < 1$ και το ακτινικό όριο γωνίας θ ορίζεται ως το $\lim_{r \rightarrow 1} f^{-1}(re^{2\pi i\theta})$.

Προφανώς, από το Θεώρημα του Καραθεοδωρή συνεπάγεται ότι αν το D είναι τοπικώς συνεκτικό, τότε ορίζονται τα ακτινικά όρια για κάθε γωνία, αλλά και το αντίστροφο.

Θεώρημα 3.5.5 (Douady–Hubbard) Αν το c ικανοποιεί μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (i) έλκεται προς μία ελκυστική τροχιά,





- (ii) έλκεται προς μία ουδέτερη περιοδική τροχιά με ιδιοτιμή που είναι ρίζα της μονάδας,
(iii) είναι προπεριοδικό (αλλά όχι περιοδικό) σημείο,
τότε τα K_c και J_c είναι τοπικώς συνεκτικά.

Αλλά τα σύνολα Julia δευτεροβάθμιων πολυωνύμων δεν είναι πάντα τοπικώς συνεκτικά, όπως δείχνει το επόμενο

Θεώρημα 3.5.6 (Douady–Sullivan) Αν το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο p_c έχει ένα ουδέτερο σταθερό σημείο του οποίου η ιδιοτιμή δεν είναι ρίζα της μονάδας και το p_c δεν είναι τοπικώς συζυγές με την παράγωγό του, τότε το σύνολό του Julia, J_c , δεν είναι τοπικώς συνεκτικό.

Όσον αφορά στην τοπική συνεκτικότητα του συμπληρώματος (ως προς την $\overline{\mathbb{C}}$) του συνόλου Mandelbrot, υπάρχει, προς το παρόν, μόνο το εξής

Θεώρημα 3.5.7 (Douady–Hubbard) Έστω $\Phi: \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus D(0, 1)$ ο σύμμορφος αυτομορφισμός του θεωρήματος της συνεκτικότητας του \mathcal{M} . Τότε, για κάθε $\theta \in \mathbb{Q}$, το ακτινικό όριο γωνίας $\lim_{r \rightarrow 1} \Phi^{-1}(re^{2\pi i\theta})$ υπάρχει, είναι μοναδικό και ικανοποιεί είτε την περίπτωση (ii) ή την (iii) του Θεωρήματος 3.5.5.

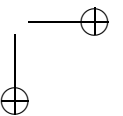
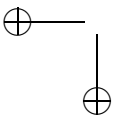
Την τοπική ομοιότητα του συνόλου Mandelbrot με τα σύνολα Julia επισημαίνει η [102]. Η αυθεντική εργασία του Mandelbrot είναι η [107] και αργότερα εκδόθηκε το [108]. Γενικευμένα σύνολα Mandelbrot εξετάζονται στην [143]. Η [50] προτείνει μια μεθοδολογία, ώστε να αναγνωρίζουμε την περιοδικότητα κάθε μέρους του συνόλου Mandelbrot.

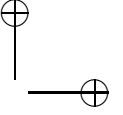
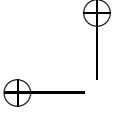
3.6 Χάος

Ο επιστήμονας μελετά τη φύση, όχι γιατί είναι χρήσιμη, αλλά γιατί τον μαγεύει και τον μαγεύει, γιατί είναι όμορφη. Αν η φύση δεν ήταν όμορφη, δε θα άξιζε να τη γνωρίσουμε και αν δεν άξιζε να γνωρίσουμε τη φύση, δε θα άξιζε ούτε και η ζωή.

Henri Poincaré

Η Θεωρία του Χάους μελετά, αφ' ενός τους τρόπους αποδιοργάνωσης της τάξης και αφ' ετέρου τους τρόπους αναδιοργάνωσής της. Υπάρχουν πολλοί ενδεχόμενοι ορισμοί του χάους, εκτενόμενοι από μετροθεωρητικές αντιλήψεις της τυχαιότητας στην εργοδική θεωρία [109] έως την τοπολογική προσέγγιση του [51] που υιοθετούμε εδώ. Το ενδιαφέρον βιβλίο [173] θίγει αρχές της χαοτικής δυναμικής, χωρίς





να υπεισέρχεται σε εφαρμογές βάνους κυρίως από μαθηματικών και φιλοσοφικής άποψης. Η σχέση του χάους με την επεξεργασία της πληροφορίας μελετάται στο [119].

Έστω $f: X \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση επί ενός μετρικού χώρου (X, ρ) .

Ορισμός 3.6.1 Η f λέγεται τοπολογικώς μεταβατική ή αναμειγμένη, αν, για κάθε ζεύγος ανοικτών συνόλων $U, V \subset X$, υπάρχει ένας πεπερασμένος ακέραιος $k > 0$ τέτοιος, ώστε $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Διαισθητικώς, μια τοπολογικώς μεταβατική απεικόνιση έχει σημεία τα οποία μετακινούνται τελικώς υπό επανάληψη από μια αρκετά μικρή περιοχή προς οιαδήποτε άλλη. Συνεπώς, το δυναμικό σύστημα δεν μπορεί να αποσυντεθεί σε δυο διάζευκτα ανοικτά σύνολα, τα οποία παραμένουν αμετάβλητα υπό την απεικόνιση.

Πρόταση 3.6.1 Αν η τροχιά $\{f^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ είναι πυκνή στο ανοικτό σύνολο $U \subset X$ για κάποιο $x \in U$, τότε η f είναι τοπολογικώς μεταβατική. \square

Ορισμός 3.6.2 Ένα δυναμικό σύστημα $\{X; f\}$ είναι τοπολογικώς μεταβατικό, αν η f είναι τοπολογικώς μεταβατική.

Παράδειγμα 3.6.1 Το δυναμικό σύστημα $\{[0, 1]; f(x) = \min(2x, 2 - 2x)\}$ είναι τοπολογικώς μεταβατικό. Πράγματι, έστω ότι U, V είναι οιοδήποτε ζεύγος ανοικτών διαστημάτων στο μετρικό χώρο $([0, 1], \rho_E)$. Προφανώς κάθε εφαρμογή του μετασχηματισμού αυξάνει το μήκος του διαστήματος V κατά τέτοιον τρόπο, ώστε αυτό τελικώς επικαλύπτει το U .

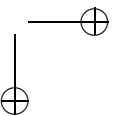
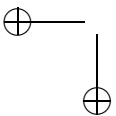
Ορισμός 3.6.3 Η $f: X \rightarrow X$ έχει ευαίσθητη εξάρτηση από αρχικές συνθήκες, αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in X$ και για κάθε περιοχή U του x υπάρχει $y \in U$ και ένας ακέραιος $n \geq 0$ τέτοιος, ώστε $\rho(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

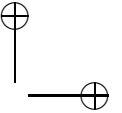
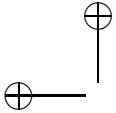
Διαισθητικώς, μια απεικόνιση έχει ευαίσθητη εξάρτηση από αρχικές συνθήκες, αν υπάρχουν σημεία αυθαιρέτως κοντά στο x , τα οποία τελικώς απομακρύνονται από το x τουλάχιστο d μετά από επανάληψη της f . Άρα, σημεία τα οποία βρίσκονται αρχικώς κοντά το ένα στο άλλο, δεν παραμένουν κοντά μετά από επαναλήψεις της f (βλ. [82]).

Παράδειγμα 3.6.2 Η δευτεροβάθμια απεικόνιση $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ με $\mu > 2 + \sqrt{5}$ και $x \in I = [0, 1]$ έχει ευαίσθητη εξάρτηση από αρχικές συνθήκες στο Λ , όπου Λ είναι ένα σύνολο τύπου Cantor. Για να το δούμε, επιλέγουμε $\delta < \text{diam}(A_0)$, όπου A_0 είναι ένα ανοικτό διάστημα του I κέντρου $1/2$. Έστω $x, y \in \Lambda$. Αν $x \neq y$, τότε $S(x) \neq S(y)$, έτσι τα δρομολόγια των x και y πρέπει να διαφέρουν σε τουλάχιστον ένα μέρος, έστω το n -οστό. Αλλά αυτό σημαίνει ότι οι $F_\mu^n(x)$ και

$F_\mu^n(y)$ βρίσκονται στις αντίθετες πλευρές του A_0 έτσι, ώστε

$$|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > \delta.$$





Παράδειγμα 3.6.3 Μια άρρητη περιστροφή του κύκλου είναι τοπολογικώς μεταβατική αλλά μη ευαίσθητη σε αρχικές συνθήκες, αφού όλα τα σημεία παραμένουν στην ίδια απόσταση μακριά μετά την επανάληψη.

Ορισμός 3.6.4 Το δυναμικό σύστημα $\{X; f\}$ είναι ευαίσθητο σε αρχικές συνθήκες, αν η f έχει ευαίσθητη εξάρτηση από αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα 3.6.4 Το δυναμικό σύστημα $\{[0, 1]; 2x \pmod{1}\}$ είναι ευαίσθητο σε αρχικές συνθήκες.

Ορισμός 3.6.5 Η $f: X \rightarrow X$ λέγεται ότι είναι χαώδης ή χαοτική στο X , αν

- (α) η f είναι τοπολογικώς μεταβατική,
- (β) η f έχει ευαίσθητη εξάρτηση από αρχικές συνθήκες και
- (γ) το σύνολο των περιοδικών σημείων της f είναι πυκνό στο X .

Διαισθητικώς, μια απεικόνιση είναι χαοτική, αν, σύμφωνα με τον Devaney, συνδυάζει (β) μη προβλεπτικότητα και (α) μη αποσύνθεση μαζί με στοιχεία (γ) κανονικότητας. Προσφάτως αποδείχθηκε ότι η συνθήκη (β) έπεται από τις (α) και (γ) (βλ. [42]).

Παράδειγμα 3.6.5 Ένα από τα απλούστερα επίπεδα δυναμικά συστήματα με μορφοκλασματικό ελκυστή είναι ο μετασχηματισμός του αρτοποιού, ο οποίος ονομάζεται έτσι, επειδή μοιάζει με τη διεργασία της επαναλαμβανόμενης πλάσης ενός κομματιού από ζυμάρι και της δίπλωσής του στα δύο.

Έστω ότι $E = [0, 1] \times [0, 1]$ είναι το μοναδιαίο τετράγωνο. Για σταθερό $0 < \lambda < 1/2$ ορίζουμε το μετασχηματισμό του αρτοποιού $f: E \rightarrow E$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x, \lambda y), & \text{αν } 0 \leq x \leq 1/2 \\ (2x - 1, \lambda y + 1/2), & \text{αν } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

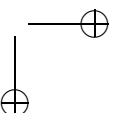
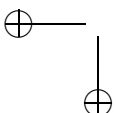
Αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτείνει το E σε ένα ορθογώνιο πλευρών $2 \times \lambda$, κόβοντάς το σε ορθογώνια πλευρών $1 \times \lambda$ και τοποθετώντας τα το ένα δίπλα στο άλλο αφήνοντας μεταξύ τους κενό $1/2 - \lambda$ μονάδες.

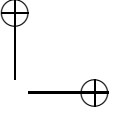
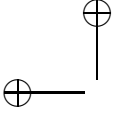
Η απεικόνιση f είναι χαώδης στο $[0, 1]$ (βλ. [51]).

Θεώρημα 3.6.1 Το $f: J(f) \rightarrow J(f)$ είναι χαώδες στο $J(f)$.

Απόδειξη.

- (α) Το J περιέχει σημεία z με επαναλήψεις $f^k(z)$, οι οποίες είναι πυκνές στο J .
- (β) Η $f: J(f) \rightarrow J(f)$ έχει ευαίσθητη εξάρτηση από αρχικές συνθήκες λόγω απωστικότητας.

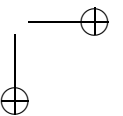
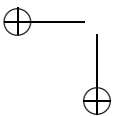


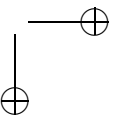
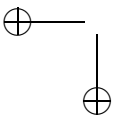
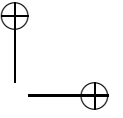
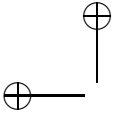


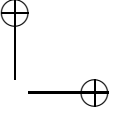
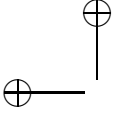
(γ) Τα περιοδικά σημεία της f είναι πυκνά στο J εξ' ορισμού.

□

Για περαιτέρω μελέτη παραπέμπουμε στις [25], [26], [48], καθώς και στα βιβλία [44], [75], [17], [167], [86], [40], [146], [123] και [37].







Κεφάλαιο 4

Επαναληπτικές μέθοδοι

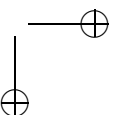
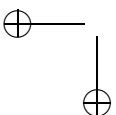
Ένα πλήθος μαθηματικών εφαρμογών καταλήγουν στο πρόβλημα εύρεσης των ριζών κάποιας εξίσωσης χρησιμοποιώντας επαναληπτικές μεθόδους. Δυστυχώς, η σύγκλιση μιας επαναληπτικής μεθόδου δεν εξασφαλίζεται ανεξαρτήτως της αρχικής τιμής. Υπάρχουν ωρισμένες αρχικές τιμές, οι οποίες δεν είναι κατάλληλες, ώστε να επιφέρουν το επιθυμητό αποτέλεσμα και των οποίων οι επαναλήψεις συμπεριφέρονται χροστικώς. Η παρατήρηση του συνόλου όλων των αρχικών τιμών από γεωμετρική άποψη, μας βοηθάει τόσο στην επιλογή των αρχικών προσεγγίσεων προς τη ρίζα όσο και στη σύγκριση των ιδιοτήτων σύγκλισης διαφόρων επαναληπτικών μεθόδων.

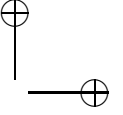
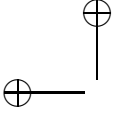
Έστω ότι R είναι μία συνάρτηση μιγαδικών τιμών, αναλυτική σε κάποιο κατάλληλως ωρισμένο συμπαγές υποσύνολο (ή τόπο) T του μιγαδικού επιπέδου \mathbb{C} . Δοθείσης μιας αρχικής τιμής $z_0 \in T$ ορίζουμε την επαναληπτική ακολουθία $(z_k)_{k=0}^{\infty}$ με $z_{k+1} = R(z_k)$ για κάθε $k = 0, 1, \dots$. Φαίνεται ότι η σύγκλιση της ακολουθίας των επαναλήψεων $z_0, R(z_0), R^2(z_0), \dots$, εξασφαλίζεται για οιαδήποτε επιλογή του αρχικού σημείου z_0 επί του διευρυμένου μιγαδικού επιπέδου, εκτός αν το z_0 είναι σημείο ενός πουθενά πυκνού, τέλειου συνόλου, του συνόλου Julia, $J(R)$, της συνάρτησης. Πόσο «κοντά» πρέπει να βρίσκεται το αρχικό σημείο στην επιθυμητή ρίζα, εξαρτάται από ωρισμένες συνθήκες σύγκλισης, ενώ πόσο «γρήγορα» θα συγκλίνει η μέθοδος, εξαρτάται από την τάξη σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου.

Η ταχύτητα ή τάξη σύγκλισης μιας επαναληπτικής διαδικασίας (συνάρτησης) προς ένα ελκυστικό σταθερό της σημείο $z^* \in T$ ορίζεται ως ακολούθως. Έστω $e_n = z_n - z^*$ το σφάλμα που αντιστοιχεί στη n -οστή επανάληψη της R . Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor της R έχουμε, δεδομένου ότι $R(z^*) = z^*$,

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= z_{n+1} - z^* = R(z_n) - R(z^*) = R(z^* + e_n) - R(z^*) \\ &= \frac{1}{\sigma!} R^{(\sigma)}(z^*)(e_n)^\sigma + O[(e_n)^{\sigma+1}] \text{ καθώς } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

όπου σ είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει $R^{(\sigma)}(z^*) \neq 0$ (συνήθως $\sigma = 1$). Εξ αιτίας αυτού, αν η επανάληψη δεν περατωθεί σε πεπερασμένο





πλήθος βημάτων, το $\lim_{n \rightarrow \infty} e_{n+1}/e_n^\sigma$ υπάρχει. Τότε η R ονομάζεται επαναληπτική συνάρτηση τάξης σ .

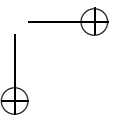
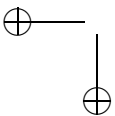
Ο Ernst Schröder, το 1870, περιέγραψε μια μέθοδο εύρεσης μιας ρητής επαναληπτικής συνάρτησης οιασδήποτε τάξης σύγκλισης για τον καθορισμό των ριζών μιας εξίσωσης. Άλλου είδους συναρτήσεις εισήχθησαν από τον Julius König για τον ίδιο λόγο. Επίσης, η μέθοδος του Laguerre είναι η πιο άμεση επαναληπτική μέθοδος για την εύρεση των ριζών πολυωνύμων των οποίων οι ρίζες είναι πραγματικές και απλές. Σχετικά με την εύρεση των ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων οι προαναφερθείσες μέθοδοι αφορούν στην επανάληψη ρητών συναρτήσεων πάνω στη σφαίρα Riemann, η οποία περιγράφεται από την κλασική θεωρία των Julia και Fatou, καθώς και από μεταγενέστερες εργασίες υψίστης, και μέσα στα πλαίσια της Αριθμητικής Ανάλυσης, σημασίας. Σ' αυτόν τον τομέα οι μελέτες έχουν ήδη αρχίσει και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις [144], [43], [93], [156] και [5].

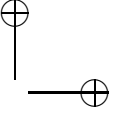
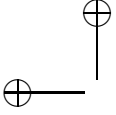
Τα κύρια ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια είναι τα εξής: Ποια αρχικά σημεία θα μας οδηγήσουν στις επιθυμητές ρίζες, ποια μορφή έχουν οι περιοχές εκείνων των αρχικών σημείων που συγκλίνουν ή που δε συγκλίνουν προς τις επιθυμητές ρίζες; Είναι δυνατόν να έχουμε σύγκλιση σε σημεία ή κύκλους διαφορετικούς από τις επιθυμητές ρίζες; Στο κεφάλαιο αυτό, το οποίο αποτελεί κατά κύριο λόγο πρωτότυπη εργασία του συγγραφέα, προσπαθούμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα που τέθηκαν χρησιμοποιώντας διάφορες επαναληπτικές συναρτήσεις προκαθορισμένης τάξης, όπως οι επαναληπτικές μέθοδοι των Schröder, König και Laguerre και μελετώντας τις τόσο σε δυναμικούς όσο και σε παραμετρικούς χώρους. Με αυτόν τον τρόπο γενικεύουμε το φαινόμενο που ανακαλύφθηκε από τους Curry, Garnett και Sullivan [43] για μια ωρισμένη μονοπαραμετρική οικογένεια μιγαδικών κυβικών πολυωνύμων, ότι οι παραμετρικές τιμές για τις οποίες η μέθοδος Newton αποτυγχάνει ως προς τη σύγκλιση προς μία ρίζα του πολυωνύμου, σχηματίζουν σύνολα τύπου Mandelbrot. Οι παρατηρήσεις τους αποτελέσαν μέρος του κινήτρου για τη θεωρία των απεικονίσεων δευτεροβαθμίου τύπου, η οποία αναπτύχθηκε ανεξαρτήτως από τους Douady και Hubbard στην [55], όπου και υπάρχουν οι αποδείξεις για κάποιες από τις παρατηρήσεις αυτές.

4.1 Η μέθοδος Newton για δευτεροβάθμια πολυώνυμα

Η επαναληπτική συνάρτηση Newton για την εύρεση των μιγαδικών ριζών της εξίσωσης $f(z) = 0$, όπου f μία αυθαίρετη απεικόνιση, είναι η ρητή συνάρτηση

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \quad (4.1)$$





για $f'(z) \neq 0$. Η παράγωγος της N_f είναι

$$N'_f(z) = \frac{f(z)f''(z)}{[f'(z)]^2},$$

επομένως οι απλές ρίζες της $f(z) = 0$ είναι υπερελκυστικά σταθερά σημεία της N_f . Η δυναμική της μεθόδου Newton έχει μελετηθεί εκτενώς στις [52] και [125].

Είδαμε ότι οιοδήποτε δευτεροβάθμιο πολυώνυμο, μπορεί να αναχθεί στη μορφή $p_c(z) = z^2 - c$ (το πρόσημο μείον τίθεται για λόγους ευκολίας) μέσω μιας γραμμικής αλλαγής συντεταγμένων. Καθορίζουμε, για την επαναληπτική μέθοδο Newton, τη λεκάνη έλξης κάθε μιγαδικής ρίζας $\pm\sqrt{c}$, δηλ. εφαρμόζουμε επαναληπτικώς τη ρητή συνάρτηση

$$N_{p_c}(z) = z - \frac{p_c(z)}{p'_c(z)} = \frac{z^2 + c}{2z}.$$

Σημειώστε ότι, εκτός του ∞ , τα σταθερά σημεία της $N_{p_c}(z)$ είναι οι ρίζες $\pm\sqrt{c}$, όπως αναμενόταν. Σε ότι αφορά τον καθορισμό του είδους τους, έχουμε ότι $N'_{p_c}(z) = (z^2 - c)/(2z^2)$, επομένως οι ρίζες είναι υπερελκυστικές. Ας χρησιμοποιήσουμε όμως τώρα ένα μετασχηματισμό Möbius, ώστε να απεικονίσουμε τη δυναμική σε ένα ισοδύναμο σύστημα, το οποίο είναι ευκολότερο να χειριστούμε. Μια καλή ιδέα είναι να στείλουμε το $\pm\sqrt{c}$ στα σημεία $\infty, 0$, αντιστοίχως, η οποία εκπληρούται, για παράδειγμα, από τον μετασχηματισμό

$$w = \Phi(z) = \frac{z + \sqrt{c}}{z - \sqrt{c}}.$$

Ο αντίστροφός του είναι ο

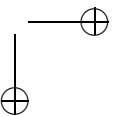
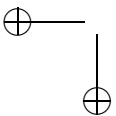
$$\Phi^{-1}(w) = \frac{-w\sqrt{c} - \sqrt{c}}{-w + 1} = \sqrt{c} \frac{w + 1}{w - 1}.$$

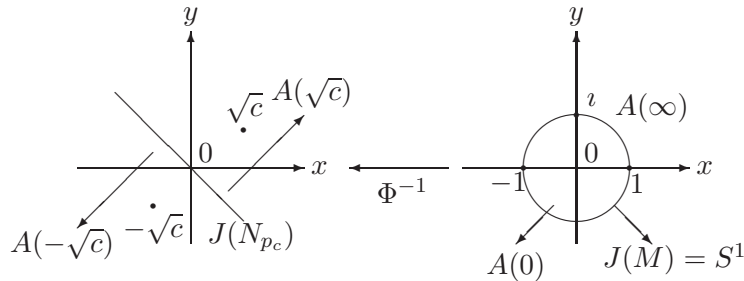
Αν η $N_{p_c}(z)$ γίνει $M(w)$, τότε

$$\begin{aligned} M(w) &= \Phi \circ N_{p_c} \circ \Phi^{-1}(w) = \Phi \circ N_{p_c} \left(\sqrt{c} \frac{w + 1}{w - 1} \right) \\ &= \Phi \left(\sqrt{c} \frac{w^2 + 1}{w^2 - 1} \right) = \frac{(w^2 + 1)/(w^2 - 1) + 1}{(w^2 + 1)/(w^2 - 1) - 1} \\ &= w^2, \end{aligned}$$

όπως ίσως είχαμε μαντέψει. Έχουμε ήδη αντιμετωπίσει την περίπτωση αυτή στο Παράδειγμα 2.2.1 και γνωρίζουμε ότι $J(M) = S^1$, με εσωτερικό την $A(0)$ και εξωτερικό την $A(\infty)$.

Μετασχηματίζοντας πίσω στο επίπεδο των z λαμβάνουμε: $\Phi^{-1}(1) = \infty$, επομένως η $\Phi^{-1}(S^1)$ είναι μια ευθεία γραμμή: $\Phi^{-1}(-1) = 0$, επομένως αυτή η γραμμή





Σχήμα 4.1: Μετασχηματισμός των λεκανών έλξης και του συνόλου Julia της $M(w) = w^2$ (δεξιά), πίσω στο αρχικό επίπεδο των z (αριστερά).

περιέχει την αρχή των αξόνων και $\Phi^{-1}(i) = -i\sqrt{c}$, ο οποίος είναι ένας μιγαδικός αριθμός κάθετος προς τον \sqrt{c} .

Άρα, το σύνολο Julia της συνάρτησης N_{pc} , $J(N_{pc}) = \Phi^{-1}(S^1)$, είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει το $-\sqrt{c}$ με το \sqrt{c} . Περαιτέρω, συμπεραίνουμε ότι οι λεκάνες έλξης $A(\pm\sqrt{c})$ είναι τα ημιεπίπεδα στις αντίθετες πλευρές του $J(N_{pc})$ (βλ. Σχήμα 4.1). Περισσότερες πληροφορίες επί της μεθόδου Newton υπάρχουν στα [78] και [94].

4.2 Επαναληπτική μέθοδος Schröder

Οι επαναληπτικές συναρτήσεις Schröder αποτελούν μία οικογένεια επαναληπτικών συναρτήσεων, οι οποίες είναι σχεδιασμένες, ώστε να συγκλίνουν με τάξη $\sigma \geq 2$ προς τις ρίζες μιας συνάρτησης f . Μέρος αυτού του εδαφίου έχει αναπτυχθεί στην [59] και μπορεί να θεωρηθεί επέκταση της [156] για συναρτήσεις Schröder τάξης υψηλότερης από τέσσερα.

4.2.1 Κατασκευή των συναρτήσεων Schröder

Η πρώτη ενδιαφέρουσα περίπτωση, $\sigma = 2$, αντιστοιχεί σε τετραγωνική σύγκλιση και επιφέρει τη γνωστή μέθοδο Newton.

Το σημείο z^* είναι μια ρίζα της $f(z) = 0$ τότε και μόνο, αν είναι ένα σταθερό σημείο της

$$R(z) = z - h(z)f(z),$$

όπου $h(z)$ είναι μία μη μηδενική, αναλυτική στο T , συνάρτηση. Το πρόβλημα είναι να κατασκευάσουμε την $R(z)$ τέτοια, ώστε

$$R'(z^*) = 0.$$

Αφού

$$R'(z) = 1 - h'(z)f(z) - h(z)f'(z)$$

και $f(z^*) = 0$, επιλέγουμε

$$h(z) = \frac{1}{f'(z)}$$

για $f'(z) \neq 0$.

Υψηλότερης τάξης επαναληπτικές συναρτήσεις μπορούν να κατασκευασθούν με την ίδια μεθοδολογία. Αν η g είναι αναλυτική σε κάποιον τόπο T τότε, για μικρό h ,

$$g(z+h) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z)h^k = g(z) + B(z).$$

Το $B(z)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία τυπική δυναμοσειρά του h , της οποίας οι συντελεστές είναι συναρτήσεις του z . Αν $b_1(z) = g'(z) \neq 0$, τότε η $B(z)$ αντιστρέφεται και έχουμε

$$B^{-1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(z)h^k,$$

όπου (βλ. [87] ή [92])

$$c_k(z) = \frac{1}{k!} \left[\frac{1}{f'(z)} \frac{d}{dz} \right]^{k-1} \frac{1}{f'(z)}$$

και

$$\left[\frac{1}{f'(z)} \frac{d}{dz} \right]^{k-1} = \underbrace{\left[\frac{1}{f'(z)} \frac{d}{dz} \right] \left[\frac{1}{f'(z)} \frac{d}{dz} \right] \cdots \left[\frac{1}{f'(z)} \frac{d}{dz} \right]}_{k-1 \text{ παράγοντες}}.$$

Οι συντελεστές $c_k(z)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις σε κάθε υπότοπο του T για $g'(z) \neq 0$, αφού εκφράζονται και αυτοί σε όρους των δυνάμεων των $b_k(z)$ και $[b_1(z)]^{-1}$, οι οποίες είναι αναλυτικές συναρτήσεις.

Ορίζουμε τις επαναληπτικές συναρτήσεις *Schröder* ως (βλ. [87])

$$S_{\sigma}(z) = z + \sum_{k=1}^{\sigma-1} c_k(z)[-f(z)]^k, \quad \sigma = 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

Για $\sigma = 2$, παίρνουμε τη γνωστή συνάρτηση (4.1) των Newton-Raphson, ενώ για $\sigma = 3$ παίρνουμε την επανάληψη

$$S_3(z) = C(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \left[1 + \frac{f(z)f''(z)}{2[f'(z)]^2} \right],$$

η οποία αναφέρεται συχνά ως τύπος του *Chebyshev*.

4.2.2 Ανακατασκευή των συναρτήσεων Schröder

Παρουσιάζουμε μια νέα αλγοριθμική κατασκευή, ώστε να υπολογίσουμε, γενικώς, όλους τους όρους των συναρτήσεων Schröder. Παρατηρούμε ότι η επαναληπτική μέθοδος Schröder έχει αριθμητή $(2\sigma - 3)(d - 1) + 1$ βαθμού, όπου $d = \deg(f)$, και παρονομαστή ενός βαθμού λιγότερο (είναι τύπου Newton–Raphson ως προς τη μορφή). Η επαναληπτική ακολουθία $z_{k+1} = S_\sigma(z_k)$, $\sigma = 2, 3, \dots$, συγκλίνει «τοπικώς» προς τις ρίζες z_i^* , $i = 1, 2, \dots, d$ της $f(z) = 0$, καθώς $O(|z_n - z_i^*|^\sigma)$. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο

Θεώρημα 4.2.1 Έστω ότι η f είναι αναλυτική σε έναν τόπο T και έστω $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in T$. Τότε οι συναρτήσεις S_σ είναι αναλυτικές στον T και, για κάθε $w \in T$ με $f(w) = 0$,

$$\begin{aligned} S_\sigma(w) &= w, \\ S'_\sigma(w) &= S''_\sigma(w) = \dots = S_\sigma^{(\sigma-1)}(w) = 0. \end{aligned}$$

Άρα το w είναι ένα υπερελκυστικό σταθερό σημείο.

Απόδειξη. Βλ. [87], Θεώρημα 6.12c, σ. 530. \square

Οι S_σ αποτελούν μέρος μιας άπειρης σειράς ως προς f και, είναι προφανές, ότι ο υπολογισμός τους απαιτεί τις πρώτες $\sigma - 1$ παραγώγους της f στο σημείο z . Άρα η παραπάνω μορφή της (4.2) δεν είναι τόσο εύχρηστη ούτε για γενικευμένους υπολογισμούς ούτε για τον προγραμματισμό όλων των όρων της S_σ . Για να εξαλείψουμε αυτήν τη δυσχέρεια, εισάγουμε την ακόλουθη κατασκευή.

Ξεκινώντας με $h_1(z) = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_1(z)}{f'(z)} \right)' \frac{1}{f'(z)} &= \frac{h'_1(z)f'(z) - h_1(z)f''(z)}{[f'(z)]^3} = \frac{h_2(z)}{[f'(z)]^3}, \\ \left(\frac{h_2(z)}{[f'(z)]^3} \right)' \frac{1}{f'(z)} &= \frac{h'_2(z)f'(z) - 3h_2(z)f''(z)}{[f'(z)]^5} = \frac{h_3(z)}{[f'(z)]^5} \end{aligned}$$

και, γενικώς,

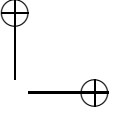
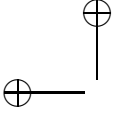
$$h_{k+1}(z) = h'_k(z)f'(z) - (2k - 1)h_k(z)f''(z) \quad (4.3)$$

για κάθε $k = 1, 2, \dots, \sigma - 2$. Άρα,

$$c_k(z) = \frac{1}{k!} \frac{h_k(z)}{[f'(z)]^{2k-1}},$$

οπότε η (4.2) γίνεται

$$S_\sigma(z) = z + \sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{h_k(z)}{[f'(z)]^{2k-1}} [f'(z)]^k. \quad (4.4)$$



Από την Εξ. (4.3) λανθάνει, παρ' όλο που η κατασκευή των h_k για κάθε $k = 2, 3, \dots, \sigma - 1$ απαιτεί τις πρώτες k παραγώγους της f , ότι οι όροι των S_σ μπορούν να υπολογιστούν κατά επαγωγικό τρόπο, αποφεύγοντας έτσι τη χρονοβόρα διαδικασία του επαναλαμβανόμενου υπολογισμού των k τάξεως παραγώγων για κάθε όρο. Παρατηρούμε επίσης ότι οι S_σ χρησιμοποιούν $\sigma - 1$ το πλήθος h_k για κάθε $k = 1, 2, \dots, \sigma - 1$ και $\sigma \geq 2$.

Το κόστος υπολογισμού των παραγώγων είναι συνήθως μικρότερο απ' αυτό του υπολογισμού της συνάρτησης, αξιοσημείωτη εξαίρεση αποτελούν τα πολυώνυμα. Αν πρέπει να παρθεί μια απόφαση σχετικά με το ποιά συνάρτηση Schröder να χρησιμοποιήσουμε, τότε μια λογική βάση γι' αυτήν την απόφαση είναι να εξακριβώσουμε, για κάθε τάξη, ποιές περιοχές των αρχικών τιμών θα μας οδηγήσουν ή όχι στις επιθυμητές ρίζες.

4.2.3 Υπολογιστικές τεχνικές

Στην παράγραφο αυτή μεγιστοποιούμε την υπολογιστική απόδοση των συναρτήσεων Schröder παρουσιάζοντας μια νέα τεχνική βασισμένη στην κατασκευή της προηγούμενης παραγράφου.

Η υπολογιστική απόδοση μιας επαναληπτικής μεθόδου είναι ένα μέτρο για το πόσο πολύς υπολογισμός πρέπει να γίνει, ώστε να φθάσουμε με σιγουριά στη ρίζα. Αξίζει να αναφερθεί ότι, αφού η τάξη μιας μεθόδου είναι μια ιδιότητα τοπική προς την περιοχή μιας ρίζας, ο δείκτης απόδοσης μετρά μόνο πόσο καλή είναι μια μέθοδος, όταν αυτή βρίσκεται κοντά σε σύγκλιση.

Επειδή η υπολογιστική απόδοση της μεθόδου Schröder εξαρτάται από το πλήθος των υπολογισμών της f και των παραγώγων της, περιγράφουμε εδώ, πως κανείς μπορεί να μειώσει αυτούς τους υπολογισμούς και να παράγει σύντομα όλους τους όρους των S_σ .

Αν συμβολίσουμε ως

$$\Phi_k(z) = \frac{(-1)^k}{k!} h_k(z), \quad k = 1, 2, \dots, \sigma - 1,$$

τότε η (4.4) γίνεται

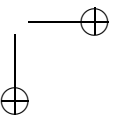
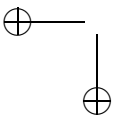
$$S_\sigma(z) = z + \frac{\Phi_1(z)}{f'(z)} f(z) + \frac{\Phi_2(z)}{[f'(z)]^3} [f(z)]^2 + \dots + \frac{\Phi_{\sigma-1}(z)}{[f'(z)]^{2\sigma-3}} [f(z)]^{\sigma-1}.$$

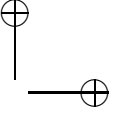
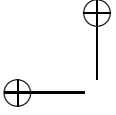
Ορίζουμε ως

$$F(z) = f(z)/f'(z) \text{ και } G(z) = f(z)/[f'(z)]^2, \quad (4.5)$$

οπότε

$$S_\sigma(z) = z + (\Phi_1(z) + (\Phi_2(z) + \dots + \Phi_{\sigma-1}(z)G(z))G(z))F(z). \quad (4.6)$$





Κατά τη διάρκεια παραγωγής των εικόνων υπολογίζουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων f' και Φ_k για κάθε $k = 1, 2, \dots, \sigma - 1$, πριν ξεκινήσει η κυρίως διαδικασία σάρωσης των εικονοστοιχείων. Στη διαδικασία σάρωσης των εικονοστοιχείων υπολογίζουμε, για κάθε επανάληψη ενός σημείου z , τις f και f' χρησιμοποιώντας το σχήμα του Horner, τις F και G από την (4.5) και τις S_σ από την (4.6).

Η περίπτωση του παραμετρικού χώρου των λ είναι πιο δύσκολη, επειδή, για τις συναρτήσεις Schröder, οι συντελεστές των πολυωνύμων f' και Φ_k εξαρτώνται πια από την παράμετρο λ , η οποία μεταβάλλεται για κάθε εικονοστοιχείο. Έτσι οι f' και Φ_k πρέπει να υπολογιστούν από την αρχή για κάθε εικονοστοιχείο μέσα στη διαδικασία σάρωσης. Κάτι τέτοιο είναι χρονοβόρο, διότι κάθε Φ_k υπολογίζεται αναδρομικώς από τα h_k για κάθε $k = 1, 2, \dots, \sigma - 1$ και σε κάθε επανάληψη εφαρμόζουμε την (4.3). Σ' αυτήν την περίπτωση ο αρχικός υπολογισμός των Φ_k λαμβάνει χώρα κατά συμβολικό τρόπο· η πληροφορία για τη δημιουργία κάθε συντελεστή του πολυωνύμου Φ_k αποθηκεύεται σύμφωνα με την παράμετρο λ . Ευτυχώς, στην περίπτωση των S_σ , έχουμε να πολλαπλασιάσουμε μόνο έναν αριθμό (ανεξάρτητο του λ) επί μια συγκεκριμένη δύναμη του $\lambda - 1$. Αυτό μπορεί να ιδωθεί από τα επόμενα.

Έστω ότι οι $c_i, i = 1, 2, \dots$ είναι μιγαδικοί αριθμοί ανεξάρτητοι του λ ή του $a = \lambda - 1$, χωρίς ν' αποκλείουμε την περίπτωση κάποιος από αυτούς να είναι ίσοι. Σημειώστε ότι τα h_k είναι τα πολυώνυμα που παρουσιάστηκαν στο Εδάφιο 4.2.2. Έχουμε τότε ότι

$$\begin{aligned}p_\lambda(z) &= z^3 + az - \lambda \\p'_\lambda(z) &= c_1 z^2 + a \\p''_\lambda(z) &= c_2 z\end{aligned}$$

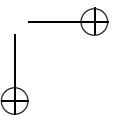
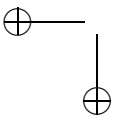
και ορίζουμε τα πολυώνυμα

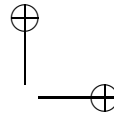
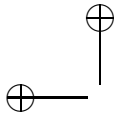
$$\begin{aligned}q(z) &= z^3 + z - 1 \\q'(z) &= c_1 z^2 + 1 \\q''(z) &= c_2 z.\end{aligned}$$

Τα $h_k(z)$ που σχετίζονται με τα q' και q'' υπολογίζονται από τις

$$\begin{aligned}h_1(z) &= 1 \\h_2(z) &= c_2 z \\h_3(z) &= c_3 z^2 + c_4 \\h_4(z) &= c_5 z^3 + c_6 z \\h_5(z) &= c_7 z^4 + c_8 z^2 + c_9\end{aligned}$$

κ.ο.κ. Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων $h_k(z)$ που σχετίζονται με τα p'_λ και p''_λ , τροποποιούμε τα ως άνω αναφερθέντα $h_k(z)$ για κάθε





$k = 1, 2, \dots, \sigma - 1$ έτσι, ώστε

$$\begin{aligned}h_1(z) &= 1 \\h_2(z) &= c_2 z \\h_3(z) &= c_3 z^2 + c_4 a \\h_4(z) &= c_5 z^3 + c_6 a z \\h_5(z) &= c_7 z^4 + c_8 a z^2 + c_9 a^2\end{aligned}$$

κ.ο.κ. Η προηγούμενη ανάλυση των h_k για κάθε $k = 1, 2, \dots, \sigma - 1$ δίνει, γενικώς, ότι

$$h_k(z) = \sum_{i=0}^m c_i a^i z^{k-1-2i},$$

όπου $m = (k-1)/2$, αν k είναι περιττός και $m = (k/2) - 1$, αν k είναι άρτιος. Είναι προφανές από τα προηγούμενα ότι μία από τις ρίζες της $h_k(z) = 0$, για άρτιες τιμές των k , είναι η $z = 0$. Άρα, αν σ είναι άρτιο, η απεικόνιση $S_\sigma(p_\lambda(z))$ έχει το $z = 0$ ως ένα ελεύθερο κρίσιμο σημείο. Βλ. το Εδάφιο 4.2.6 για περισσότερες λεπτομέρειες.

Η υπολογιστική τεχνική που συζητήσαμε, συνοψίζεται στον ακόλουθο ψευδοαλγόριθμο:

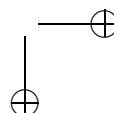
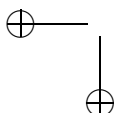
1. Υπολογίστε τους συντελεστές c_i του, σχετιζομένου με τα q' και q'' , πολυωνύμου h_k για κάθε $k = 1, 2, \dots, \sigma - 1$.
2. Για κάθε εικονοστοιχείο που αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο λ , υπολογίστε τους συντελεστές του, σχετιζομένου με τα p'_λ και p''_λ , πολυωνύμου h_k για κάθε $k = 1, 2, \dots, \sigma - 1$, πολλαπλασιάζοντας τους συντελεστές c_i του πρώτου βήματος επί τις κατάλληλες δυνάμεις του a .
3. Βρείτε τις ρίζες του p_λ και υπολογίστε ένα κρίσιμο σημείο z_0 της S_σ .
4. Εφαρμόστε τον Αλγόριθμο των Χρόνων Διαφυγής (βλ. την Ενότητα 7.3) στο επαναληπτικό σχήμα $z_{n+1} = S_\sigma(z_n)$.
5. Επαναλάβετε τα Βήματα 2 έως 4, έως ότου καλυφθεί όλο το πλέγμα των σημείων.

4.2.4 Πρόσθετα σταθερά σημεία

Αν και οι υψηλότερης τάξης αλγόριθμοι εύρεσης ριζών συγκλίνουν πιο γρήγορα εφ' όσον ξεκινήσουμε την επανάληψη κοντά στη ρίζα, ένα σοβαρό μειονέκτημά τους είναι η εμφάνιση ανεπιθύμητων ριζών και περιοδικών τροχιών.

Για $\sigma = 2$, η συνθήκη σταθερού σημείου $S_\sigma(z) = z$ επάγει ότι $f(z) = 0$. Για $\sigma > 2$, επάγει ότι $f(z) = 0$ ή ότι

$$\sum_{k=1}^{\sigma-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \frac{h_k(z)}{[f'(z)]^{2k-1}} [f(z)]^{k-1} = 0. \quad (4.7)$$

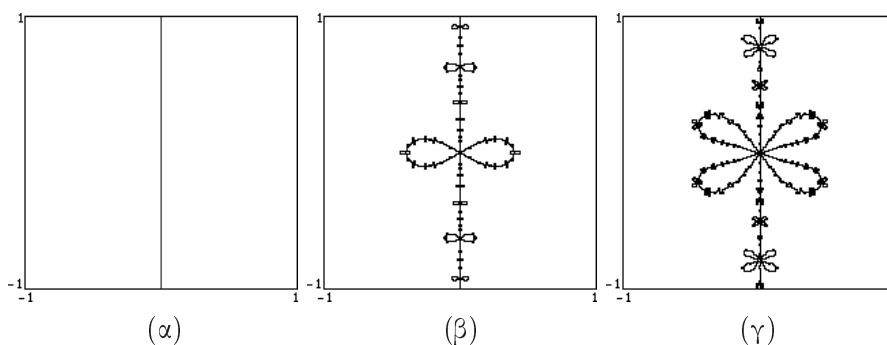


Θα ονομάζουμε πρόσθετα σταθερά σημεία τις ρίζες της (4.7), λόγω της διαφοροποίησής τους από τις ρίζες της f . Η εμφάνιση των πρόσθετων αυτών σταθερών σημείων περιπλέκει τη διαδικασία εύρεσης των ριζών. Ως απωστικά ή αδιάφορα σταθερά σημεία μεταβάλλουν τις λεκάνες έλξης των ριζών· ως ελκυστικά είναι δυνατόν να παγιδεύσουν μια επαναληπτική ακολουθία. Η συμπεριφορά των πρόσθετων αυτών σταθερών σημείων και συγκεκριμένα των ελκυστικών που οδηγούν σε παθολογικούς κύκλους, μελετήθηκε στην [57].

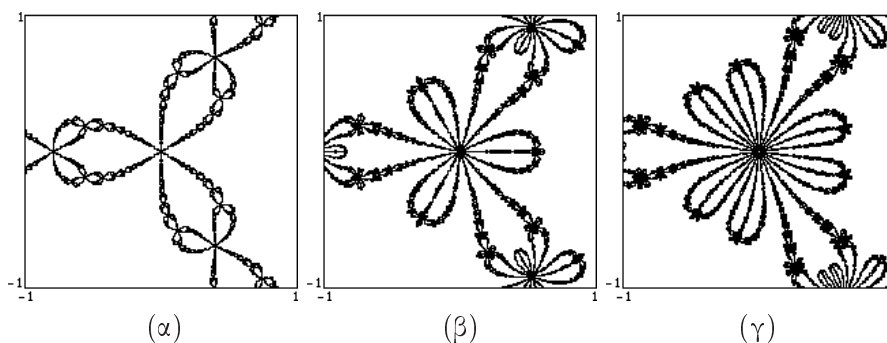
Υποθέτουμε ότι f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $d \geq 2$ και ότι υπάρχουν οι πρώτες σ παράγωγοί του. Τότε οι $h_k, k = 1, 2, \dots, \sigma$ είναι πολυώνυμα και οι S_σ είναι ρητές συναρτήσεις. Η συνήθης θεωρία επαναλήψεων των αναλυτικών συναρτήσεων δεν είναι επαρκής, για να περιγράψει τη συνολική δυναμική της μεθόδου Schröder. Σ' αυτό το σημείο έρχεται η θεωρία των Julia και Fatou, ώστε να εξηγήσει τα πιθανά είδη συμπεριφοράς της επαναληπτικής ακολουθίας $(S_\sigma^n)_{n=1}^\infty$.

4.2.5 Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί των πολυωνύμων $f_n(z) = z^n - 1$, συναρτήσεων Schröder και οι λεκάνες έλξης των n -οστών ριζών της μονάδας

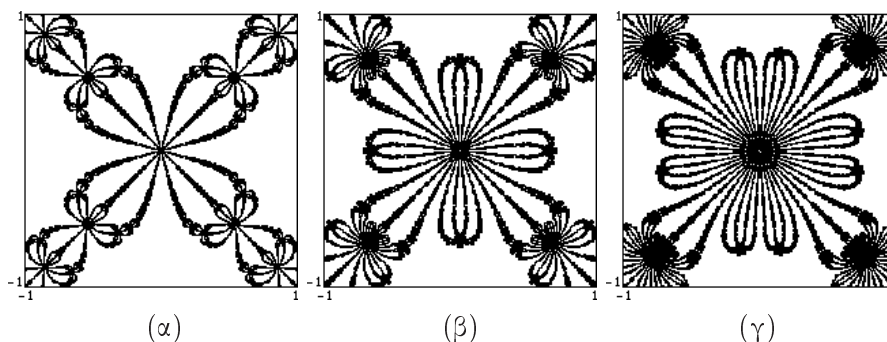
Ο Vrscay, στην [156], εξέτασε στο μιγαδικό επίπεδο, μέσω σχεδίων του υπολογιστή, τις λεκάνες έλξης των ελκυστικών σταθερών σημείων των συναρτήσεων Schröder S_σ για κάθε $\sigma = 2, 3$ και 4 που κατασκευάστηκαν να συγκλίνουν στις n -οστές ρίζες της μονάδας. Εμείς επεκτείναμε αυτή τη μελέτη προσθέτοντας την παρουσίαση συνόλων Julia για τις ίδιες τιμές των σ για λόγους σύγκρισης και αναφοράς, ενώ μελετήσαμε, στο μιγαδικό πεδίο, τις λεκάνες έλξης των ίδιων ελκυστικών σταθερών σημείων των συναρτήσεων Schröder τάξης υψηλότερης από τέσσερα χρησιμοποιώντας την κατασκευή του Εδαφίου 4.2.2.



Σχήμα 4.2: Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί του $f_2(z) = z^2 - 1$, συναρτήσεων Schröder στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος S_2 , (β) μέθοδος S_3 , (γ) μέθοδος S_4 .



Σχήμα 4.3: Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί του $f_3(z) = z^3 - 1$, συναρτήσεων Schröder στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος S_2 , (β) μέθοδος S_3 , (γ) μέθοδος S_4 .

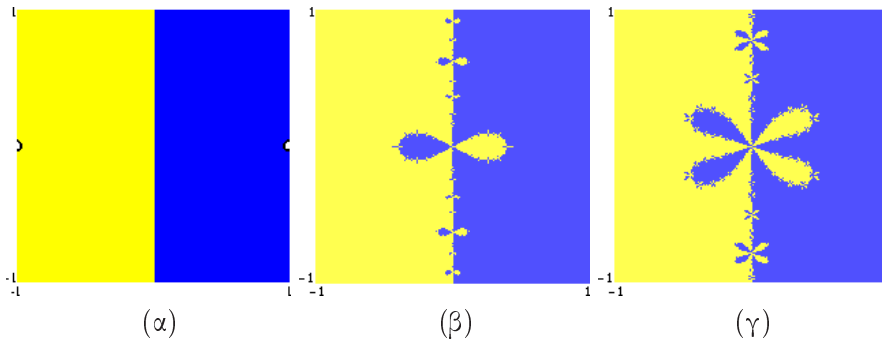


Σχήμα 4.4: Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί του $f_4(z) = z^4 - 1$, συναρτήσεων Schröder στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος S_2 , (β) μέθοδος S_3 , (γ) μέθοδος S_4 .

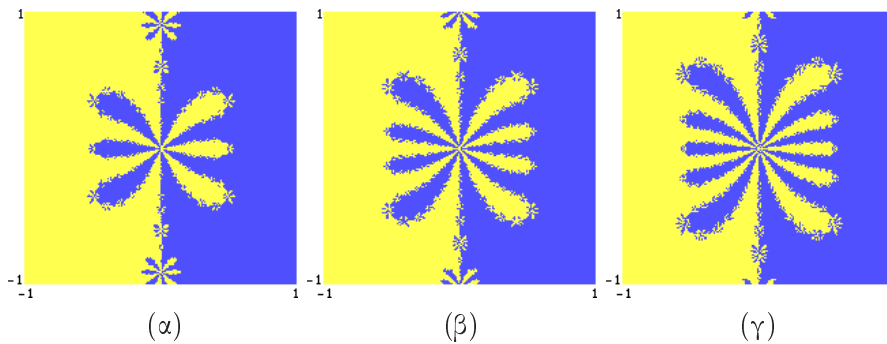
Τα Σχήματα 4.2–4.4 προέκυψαν λαμβάνοντας ένα τετράγωνο ως πλέγμα των αρχικών μας τιμών και χρησιμοποιώντας την Κατασκευή 2 της Ενότητας 7.2. Τα Σχήματα 4.5–4.10 υπολογίσθηκαν χρησιμοποιώντας την Κατασκευή 3 της Ενότητας 7.2. Η ακόλουθη ανάλυση των σχεδίων αυτών μελετά ανεξαρτήτως κάθε επαναληπτική διαδικασία S_σ , όπως αυτή εφαρμόζεται στα f_n . Σε όλες τις περιπτώσεις οι n -οστές ρίζες της μονάδας συμβολίζονται ως $z_{i,n}^*$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ και $n = 2, 3, \dots$.

1η περίπτωση, $\sigma = 2$: Οι λεκάνες έλξης, $A(z_{i,n}^*)$, για $n = 2, 3$ και 4 παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.5(α), 4.7(α) και 4.9(α), αντιστοίχως.

Για $n = 2$, είναι γνωστό (το πρόβλημα Cayley [131]) ότι $A(-1) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$ και $A(1) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Με άλλα λόγια ο άξονας των φανταστικών αριθμών, \Im , είναι το σύνολο Julia $J(S_2)$ (Σχήμα 4.2(α)). Σ' αυτήν την



Σχήμα 4.5: Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_2(z) = z^2 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) μέθοδος S_2 , (β) μέθοδος S_3 , (γ) μέθοδος S_4 .



Σχήμα 4.6: Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_2(z) = z^2 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) μέθοδος S_5 , (β) μέθοδος S_6 , (γ) μέθοδος S_7 .

συγκεκριμένη περίπτωση οι αντίστροφες εικόνες $S_{2,i}^{-1}(z)$ για τις οποίες το $J(S_2)$ είναι ελκυστής υπολογίζονται ευκόλως χρησιμοποιώντας το Επαναλαμβανόμενο Σύστημα Συναρτήσεων (βλ. Ενότητα 5.1) $\{\mathbb{C}; w_1, w_2\}$, όπου

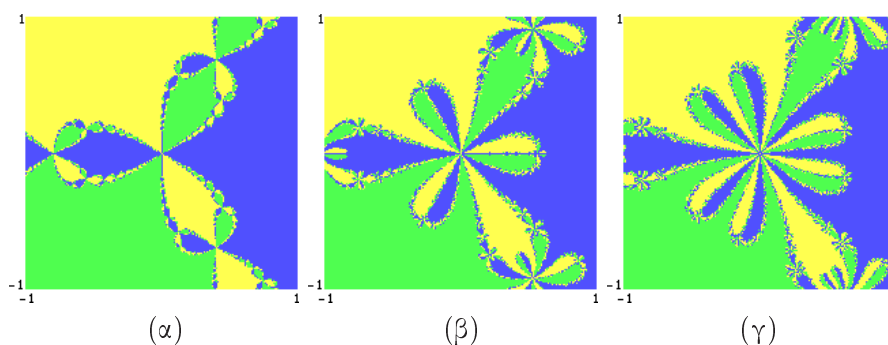
$$w_1(z) = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad w_2(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}$$

και χρησιμοποιώντας την Κατασκευή 1 της Ενότητας 7.2.

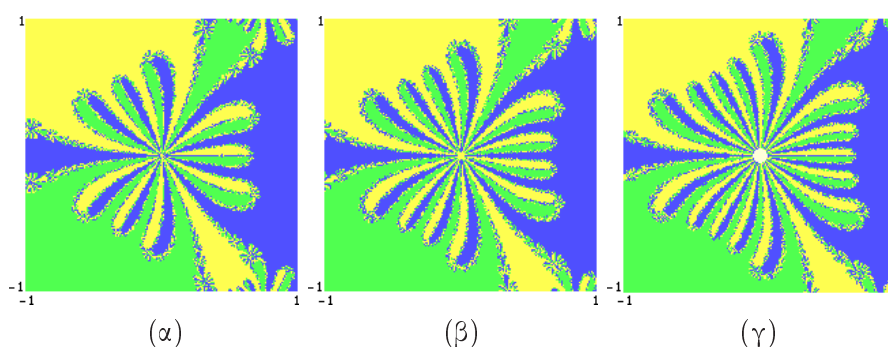
Για $n = 3$, οι κυβικές ρίζες της μονάδας είναι οι $1, w, w^2$, όπου $w = e^{2\pi i/3}$. Αναμένουμε ότι, λόγω συμμετρίας, οι λεκάνες έλξης των ριζών θα είναι οι τόποι, οι οποίοι χωρίζονται από τις διχοτόμους των πλευρών του τριγώνου που έχει κορυφές τις ρίζες (βλ. Σχήμα 4.46(β)). Όμως, κάθε σημείο του αντίστοιχου συνόλου J βρίσκεται στα σύνορα και των τριών λεκανών έλξης (βλ. Σχήμα 4.3(α)).

Ομοίως και για την περίπτωση $n = 4$ (βλ. Σχήμα 4.4(α)).

2η περίπτωση, $\sigma = 3$: Η συνθήκη σταθερού σημείου $S_3(z) = z$ επάγει ότι: (i)



Σχήμα 4.7: Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_3(z) = z^3 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) μέθοδος S_2 , (β) μέθοδος S_3 , (γ) μέθοδος S_4 .



Σχήμα 4.8: Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_3(z) = z^3 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) μέθοδος S_5 , (β) μέθοδος S_6 , (γ) μέθοδος S_7 .

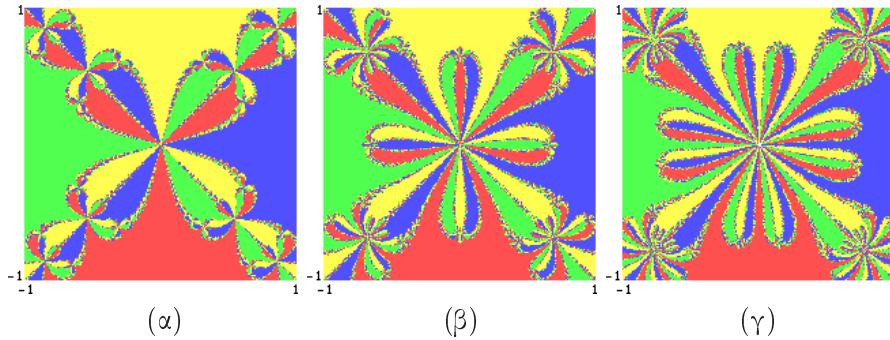
$f_n(z) = z^n - 1 = 0$ ή (ii) $z = 0$ ή (iii)

$$z^n - \frac{n-1}{3n-1} = 0,$$

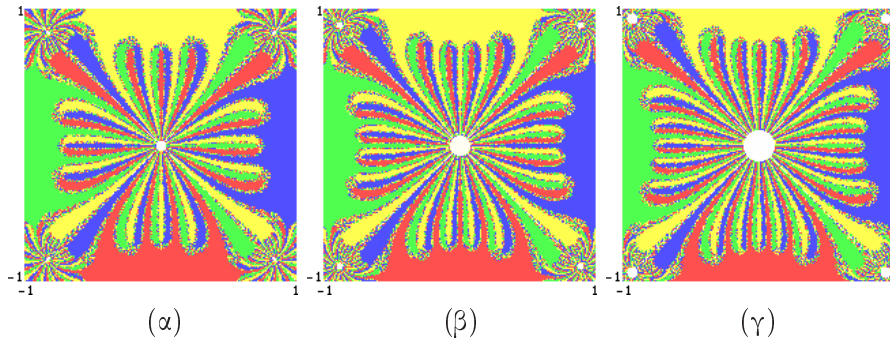
για κάθε $n = 2, 3, \dots$. Παρατηρούμε ότι, εκτός των ριζών $z_{i,n}^*$ και του $z = 0$, υπάρχουν n πρόσθετα σταθερά σημεία της S_3 , τα οποία συμβολίζουμε ως $\xi_{i,n}$. Για $n = 2, 3, \dots$ όλα τα $\xi_{i,n}$ είναι απωστικά σταθερά σημεία, αφού

$$S'_3(z)|_{z=\xi_{i,n}} = \frac{2(2n-1)}{n-1} > 1,$$

για κάθε $n = 2, 3, \dots$. Άρα, τα $\xi_{i,n}$ βρίσκονται στα σύνολα Julia $J(S_3)$ για κάθε $n \geq 2$. Η ιδιότητα αυτή διαταράσσει κάθε άμεση λεκάνη έλξης $A^*(z_{i,n}^*)$, η οποία περιβάλλει τη ρίζα $z_{i,n}^*$. Οι λεκάνες έλξης για $n = 2, 3$ και 4 παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.5(β), 4.7(β) και 4.9(β), αντιστοίχως.



Σχήμα 4.9: Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_4(z) = z^4 - 1$ στη μιγαδική περιοχή $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος S_2 , (β) μέθοδος S_3 , (γ) μέθοδος S_4 .



Σχήμα 4.10: Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_4(z) = z^4 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος S_5 , (β) μέθοδος S_6 , (γ) μέθοδος S_7 .

3η περίπτωση, $\sigma = 4$: Η συνθήκη σταθερού σημείου $S_4(z) = z$ επάγει ότι: (i) $f_n(z) = z^n - 1 = 0$ ή (ii) $z = 0$ ή (iii)

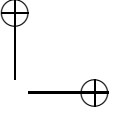
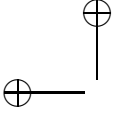
$$(z^n - \rho_n^1)(z^n - \rho_n^2) = 0,$$

όπου

$$\rho_n^{1,2} = \frac{7n^2 - 9n + 2 \pm n(39n^2 - 54n + 15)^{1/2}i}{22n^2 - 12n + 2},$$

για κάθε $n = 2, 3, \dots$. Στην περίπτωση αυτή εμφανίζεται ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών πρόσθετων σταθερών σημείων $\mu_{i,n}, \bar{\mu}_{i,n}$ για κάθε $z_{i,n}^*$. Το χαρακτηριστικό αυτό εικονογραφείται στα Σχήματα 4.5(γ), 4.7(γ) και 4.9(γ) για κάθε $n = 2, 3$ και 4, αντιστοίχως. Παρατηρήστε ότι για $n = 2$, τα τέσσερα πρόσθετα σταθερά σημεία $\pm(2 \pm i\sqrt{7})^{1/2}/\sqrt{11}$ της S_4 είναι απωστικά.

4η περίπτωση, $\sigma = 5$: Η συνθήκη σταθερού σημείου $S_5(z) = z$ επάγει ότι: (i)



$f_n(z) = 0$ ή (ii) $z = 0$ ή (iii)

$$aw^3 + bw^2 + cw + d = 0,$$

όπου $w = z^n$, $a = 50n^3 - 35n^2 + 10n - 1$, $b = -46n^3 + 69n^2 - 26n + 3$, $c = 26n^3 - 45n^2 + 22n - 3$ και $d = -6n^3 + 11n^2 - 6n + 1$. Στην περίπτωση αυτή εμφανίζονται, ένα πραγματικό και ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών πρόσθετων σταθερών σημείων για κάθε $z_{i,n}^*$. Οι λεκάνες έλξης για $n = 2, 3$ και 4 παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.6(α), 4.8(α) και 4.10(α), αντιστοίχως.

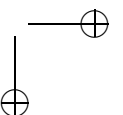
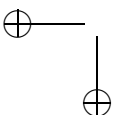
5η περίπτωση, $\sigma = 6$: Στην περίπτωση αυτή εμφανίζονται δύο ζεύγη συζυγών μιγαδικών πρόσθετων σταθερών σημείων για κάθε $z_{i,n}^*$. Οι λεκάνες έλξης για $n = 2, 3$ και 4 παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.6(β), 4.8(β) και 4.10(β), αντιστοίχως.

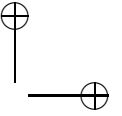
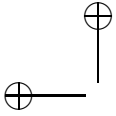
6η περίπτωση, $\sigma = 7$: Στην περίπτωση αυτή εμφανίζονται, ένα πραγματικό και δύο ζεύγη συζυγών μιγαδικών πρόσθετων σταθερών σημείων για κάθε $z_{i,n}^*$. Οι λεκάνες έλξης για $n = 2, 3$ και 4 παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.6(γ), 4.8(γ) και 4.10(γ), αντιστοίχως.

Οι λευκές περιοχές που περιβάλλουν την αρχή των αξόνων σε κάποια απ' τα σχήματα, δεν πρέπει να ερμηνευθούν ως μέρος κάποιας λεκάνης έλξης $A(z^*)$. Αφού $f'_n(0) = 0$, το $z = 0$ απεικονίζεται στο $z = \infty$. Τα γειτονικά προς το $z = 0$ σημεία είναι δυνατόν, πρώτα να απεικονισθούν αρκετές τάξεις μεγέθους μακριά του, οπότε ένα μέγα πλήθος επαναλήψεων—ασφαλώς μεγαλύτερο του τυπικού μεγίστου των 200 που χρησιμοποιούμε εδώ—ενδέχεται να απαιτηθεί, ώστε να τα επαναφέρει πίσω στα $z_{i,n}^*$, αν ποτέ γίνει αυτό. Συνεπώς, αυτά τα πλεγματικά σημεία παραμένουν ως μέρος του μαύρου βάνους, το οποίο και σχεδιάζεται ως λευκό. Μπορούμε να ελέγξουμε αυτές τις λευκές περιοχές με μια παράμετρο υπερχειλίσης που έχουμε προσθέσει στο πρόγραμμά μας γι' αυτήν τη δυναμική συμπεριφορά. Η παράμετρος υπερχειλίσης σε όλες τις εικόνες αυτού του εδαφίου είναι 1E20.

Γενικώς, δοθέντος ενός πολυωνύμου p , το σύνολο Julia των, εφαρμοζόμενων στο p , S_σ , δεν έχει κάποια ιδιαίτερη σημασία για δύο λόγους: σε όλα τα γνωστά παραδείγματα έχει μέτρο μηδέν (αλλά δείτε επίσης την εικασία στην εργασία της Keen στο [49], σ. 87) και, δεύτερον, συνήθως απωθεί τα γειτονικά του σημεία. Επομένως, αριθμητικά σφάλματα ωθούν τις περισσότερες τροχιές μακριά από το σύνολο Julia.

Παρατηρούμε ότι, για ένα δοθέν πολυώνυμο f_n , οι λεκάνες έλξης κατέχουν τις ίδιες γεωμετρικές συμμετρίες. Κι όμως, η πολυπλοκότητά τους αυξάνεται σύμφωνα με την τάξη σ των S_σ και, σε κάθε αύξηση εμφανίζεται ενσωματωμένο, με έναν απείρως αυτοόμοιο τρόπο, ένα νέο σύνολο αποτελούμενο από n «πέταλα», ένα σε κάθε λεκάνη έλξης. Μπορούμε να εικάσουμε εδώ ότι η S_σ εισάγει $\sigma - 2$ απωστικά σταθερά σημεία σε καθένα από τα ημιεπίπεδα συμμετρικώς γύρω από το 0. Ανοικτό πρόβλημα παραμένει επίσης η ασυμπτωτική κατανομή αυτών των σημείων όταν $\sigma \rightarrow \infty$. Πάντως, οι λεκάνες έλξης των ριζών «μικραίνουν» καθώς αυξάνεται η τάξη σ .





4.2.6 Η μέθοδος Schröder στον παραμετρικό χώρο

Μελετούμε τη δυναμική των, εφαρμοζόμενων στην μονοπαραμετρική οικογένεια των κυβικών πολυωνύμων (3.2), απεικονίσεων Schröder τάξης υψηλότερης από τέσσερα, αφού επιλύσουμε πρώτα κάποιες πολυωνυμικές εξισώσεις υψηλού βαθμού, ώστε να βρούμε όλα τα κρίσιμα σημεία αυτών των απεικονίσεων. Η ανάλυση της μεθόδου Schröder για το γενικό πολυώνυμο τρίτου βαθμού μας ανάγει στην ανάλυση των p_λ .

Θα εργαστούμε, λοιπόν, στον παραμετρικό χώρο των λ , όπου $\lambda \in \mathbb{C}$. Η δυναμική κάθε απεικόνισης Schröder, S_σ , μελετήθηκε στον παραμετρικό χώρο κατά τον ίδιο τρόπο, όπως και στο Εδάφιο 4.2.5 (πρβ. Κατασκευή 1 στην Ενότητα 7.3). Για κάθε σημείο $\lambda = \text{Re}(\lambda) + i \text{Im}(\lambda)$, η p_λ αναπαριστά ένα δυναμικό σύστημα με δικά του σταθερά σημεία, πιθανούς ελκυστικούς κύκλους και σύνολα Julia. Η ειδική περίπτωση $\lambda = 1$ καλύφθηκε ήδη στο Εδάφιο 4.2.5 για $n = 3$. Υπάρχουν περιοχές του παραμετρικού χώρου των λ , όπου ελκυστικοί περιοδικοί κύκλοι συνυπάρχουν με τα ελκυστικά σταθερά σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες της p_λ . Πρόσθετα σταθερά σημεία αντιστοιχούν στις ρίζες της Εξ. (4.7) που φαίνονται απωστικά για $\lambda = 1$, μπορούν να καταλήξουν ελκυστικά σε περιοχές του επιπέδου των λ . Οι μαύρες περιοχές αναπαριστούν χωρία του παραμετρικού χώρου για τα οποία υπάρχουν πρόσθετοι ελκυστικοί κύκλοι. Για να ανακαλύψουμε την ύπαρξη ελκυστικών κύκλων, οι οποίοι συγκρούονται με την αναζήτηση κατά Schröder για τις z_i^* , παρατηρούμε τις τροχιές των κρίσιμων σημείων των συναρτήσεων S_σ .

Παραγωγίζοντας την Εξ. (4.4) ως προς z , η συνθήκη $S'_\sigma(z) = 0$ επάγει ότι

$$h_\sigma(z)[f(z)]^{\sigma-1} = 0. \quad (4.8)$$

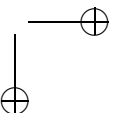
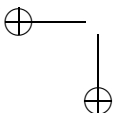
Άρα, τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία της S_σ είναι οι ρίζες της h_σ .

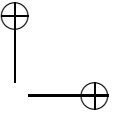
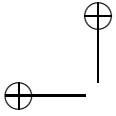
Ο βαθμός της h_{k+1} , $k = 1, 2, \dots, \sigma - 1$ ικανοποιεί την $\deg(h_{k+1}) = \deg(h_k) + n - 2$. Αφού $\deg(h_1) = 0$, ισχύει ότι $\deg(h_k) = (k-1)(n-2)$, οπότε έχουμε το πολύ $\deg(h_\sigma) = (\sigma-1)(n-2)$ διαφορετικά ελεύθερα κρίσιμα σημεία της S_σ . Τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία c_i , $i = 1, 2, \dots, \sigma - 1$ των, σχετιζόμενων με τα p_λ , συναρτήσεων S_σ μπορούν να υπολογιστούν από την Εξ. (4.8). Τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία των τριών πρώτων συναρτήσεων Schröder που σχετίζονται με τα p_λ υπάρχουν στην [156] και είναι τα εξής:

α) Για $\sigma = 2$, το $c_1 = 0$,

β) για $\sigma = 3$, τα $c_{1,2} = \pm \sqrt{(\lambda - 1)/15}$ και

γ) για $\sigma = 4$, τα $c_{1,2} = \pm \sqrt{(\lambda - 1)/6}$ και $c_3 = 0$.





Εύρεση των ελεύθερων κρίσιμων σημείων των, σχετιζόμενων με τα p_λ, S_σ για $\sigma = 5, 6, \dots, 10$

Στην περίπτωση $\sigma = 5$ τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση

$$198z^4 - 57(\lambda - 1)z^2 + (\lambda - 1)^2 = 0, \quad (4.9)$$

η οποία είναι της μορφής

$$aw^2 + bw + c = 0,$$

όπου $w = z^2$, $a = 198$, $b = -57(\lambda - 1)$ και $c = (\lambda - 1)^2$. Συνεπώς, τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία που ικανοποιούν την Εξ. (4.9) είναι τα

$$c_{1,2} = \pm\sqrt{0.0187673(\lambda - 1)}, \quad c_{3,4} = \pm\sqrt{0.2691114(\lambda - 1)}.$$

Στην περίπτωση $\sigma = 6$ τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση

$$[99z^4 - 42(\lambda - 1)z^2 + 2(\lambda - 1)^2]z = 0, \quad (4.10)$$

η οποία είναι της μορφής

$$(aw^2 + bw + c)z = 0,$$

όπου $w = z^2$, $a = 99$, $b = -42(\lambda - 1)$ ανδ $c = 2(\lambda - 1)^2$. Συνεπώς, τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία που ικανοποιούν τον πρώτο παράγοντα της Εξ. (4.10) είναι τα

$$c_{1,2} = \pm\sqrt{0.0546620(\lambda - 1)}, \quad c_{3,4} = \pm\sqrt{0.3695803(\lambda - 1)}, \quad c_5 = 0.$$

Στην περίπτωση $\sigma = 7$ τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση

$$5049z^6 - 2889(\lambda - 1)z^4 + 252(\lambda - 1)^2z^2 - 2(\lambda - 1)^3 = 0, \quad (4.11)$$

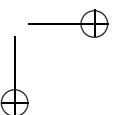
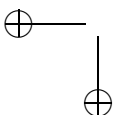
η οποία είναι της μορφής (A'.1), όπου $x = z^2$, $a = -2889/5049(\lambda - 1)$, $b = 252/5049(\lambda - 1)^2$ και $c = -2/5049(\lambda - 1)^3$. Λαμβάνουμε τη λύση της Εξ. (4.11) από την Εξ. (A'.4). Συνεπώς, τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία που ικανοποιούν την Εξ. (4.11) είναι τα

$$c_{1,2} = \pm\sqrt{0.0088133(\lambda - 1)}, \quad c_{3,4} = \pm\sqrt{0.0962079(\lambda - 1)},$$

$$c_{5,6} = \pm\sqrt{0.4671713(\lambda - 1)}.$$

Στην περίπτωση $\sigma = 8$ τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση

$$[2295z^6 - 1674(\lambda - 1)z^4 + 225(\lambda - 1)^2z^2 - 5(\lambda - 1)^3]z = 0 \quad (4.12)$$



της οποίας ο πρώτος παράγοντας είναι της μορφής (Α'.1), όπου $x = z^2$, $a = -1674/2295(\lambda - 1)$, $b = 225/2295(\lambda - 1)^2$ και $c = -5/2295(\lambda - 1)^3$. Λαμβάνουμε τη λύση του πρώτου παράγοντα της Εξ. (4.12) από την Εξ. (Α'.4). Συνεπώς, τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία που ικανοποιούν την Εξ. (4.12) είναι τα

$$c_{1,2} = \pm\sqrt{0.0277222(\lambda - 1)}, \quad c_{3,4} = \pm\sqrt{0.1398821(\lambda - 1)},$$

$$c_{5,6} = \pm\sqrt{0.5618073(\lambda - 1)}, \quad c_7 = 0.$$

Στην περίπτωση $\sigma = 9$ τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση

$$31671z^8 - 28323(\lambda - 1)z^6 + 5319(\lambda - 1)^2z^4 - 222(\lambda - 1)^3z^2 + (\lambda - 1)^4 = 0, \quad (4.13)$$

η οποία είναι της μορφής (Α'.5), όπου $x = z^2$, $a = -28323/31671(\lambda - 1)$, $b = 5319/31671(\lambda - 1)^2$, $c = -222/31671(\lambda - 1)^3$ και $d = 1/31671(\lambda - 1)^4$. Συνεπώς, τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία που ικανοποιούν την Εξ. (4.13) είναι τα

$$c_{1,2} = \pm\sqrt{0.0051142(\lambda - 1)}, \quad c_{3,4} = \pm\sqrt{0.0512578(\lambda - 1)},$$

$$c_{5,6} = \pm\sqrt{0.1842719(\lambda - 1)}, \quad c_{7,8} = \pm\sqrt{0.6536442(\lambda - 1)}.$$

Στην περίπτωση $\sigma = 10$ τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση

$$[31671z^8 - 33750(\lambda - 1)z^6 + 8316(\lambda - 1)^2z^4 - 546(\lambda - 1)^3z^2 + 7(\lambda - 1)^4]z = 0 \quad (4.14)$$

της οποίας ο πρώτος παράγοντας είναι της μορφής (Α'.5), όπου $x = z^2$, $a = -33750/31671(\lambda - 1)$, $b = 8316/31671(\lambda - 1)^2$, $c = -546/31671(\lambda - 1)^3$ και $d = 7/31671(\lambda - 1)^4$. Συνεπώς, τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία που ικανοποιούν την Εξ. (4.14) είναι τα

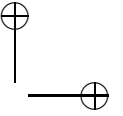
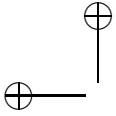
$$c_{1,2} = \pm\sqrt{0.0168572(\lambda - 1)}, \quad c_{3,4} = \pm\sqrt{0.0771610(\lambda - 1)},$$

$$c_{5,6} = \pm\sqrt{0.2287319(\lambda - 1)}, \quad c_{7,8} = \pm\sqrt{0.7428936(\lambda - 1)},$$

$$c_9 = 0.$$

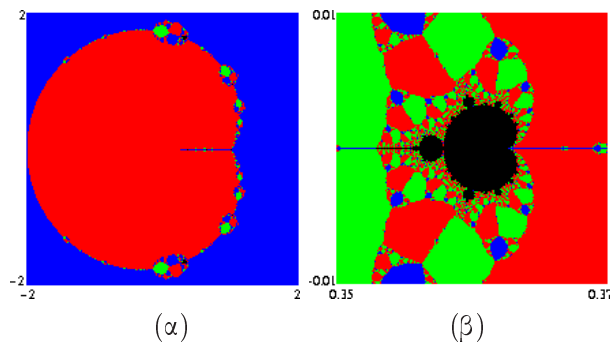
Περίπατος στον παραμετρικό χώρο

Αφού κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει ακριβώς δύο τετραγωνικές ρίζες, ορίζουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα, $+\sqrt{z}$, του z , να είναι αυτή με θετικό φανταστικό μέρος ή, αν ο z είναι γνήσιος πραγματικός, αυτή με θετικό πραγματικό μέρος. Όπως ήδη δείξαμε, τα κρίσιμα σημεία των S_σ είναι της μορφής $\pm\sqrt{b_{i,\sigma}(\lambda - 1)}$ ή 0, όπου $b_{i,\sigma} \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, [(\sigma - 1)/2]$ και $\sigma > 2$. Εμείς εξετάζουμε τη



δυναμική εκείνων των κρίσιμων σημείων που αντιστοιχούν στις θετικές τετραγωνικές ρίζες. Οι αντίστοιχες εικόνες του παραμετρικού χώρου για τα κρίσιμα σημεία $c_{i+1} = -c_i$ επιτυγχάνονται μέσω ανάκλασης γύρω από τον πραγματικό άξονα των λ .

1η περίπτωση, $\sigma = 2$: Η περίπτωση αυτή έχει μελετηθεί στην [43]. Το Σχήμα 4.11(α) παρουσιάζεται εδώ για σύγκριση και αναφορά. Αυτό το σχήμα αναπαριστά περιοχές του $[-2, 2] \times [-2, 2]$ στον παραμετρικό χώρο των λ για τις οποίες το κρίσιμο σημείο c_1 έλκεται προς τις z_i^* . Οι μικρές μαύρες περιοχές που βρίσκονται στα $\lambda \cong (0.31, \pm 1.64)$ και $(1.01, \pm 0.98)$ αναπαριστούν σύνολα παραμετρικών τιμών για τις οποίες το κρίσιμο σημείο δε συγκλίνει προς μία ρίζα της $p_\lambda(z) = 0$. Αφού δεν υπάρχουν άλλα σταθερά σημεία, οι τροχιές των κρίσιμων αυτών σημείων είναι ασυμπτωτικοί κύκλοι μήκους $k \geq 2$. Το Σχήμα 4.11(β) αποτελεί μεγέθυνση της περιοχής $[0.35, 0.37] \times [-0.01, 0.01]$.



Σχήμα 4.11: (α) Επαναληπτική εφαρμογή της S_2 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ . (β) Το μιγαδικό παραμετρικό χωρίο $[0.35, 0.37] \times [-0.01, 0.01]$ του Σχήματος (α) αποκαλύπτει ένα σύνολο Mandelbrot για την S_2 .

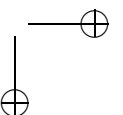
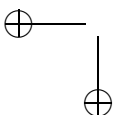
2η περίπτωση, $\sigma = 3$: Στη περίπτωση αυτή, αντιθέτως προς την επαναληπτική μέθοδο Newton, υπάρχουν δύο περιπτώσεις για τις τροχιές των c_i να παγιδευτούν μακριά από τις ρίζες z_i^* : (i) σύγκλιση προς έναν κύκλο μήκους $k \geq 2$ ή (ii) σύγκλιση προς πρόσθετα ελκυστικά σταθερά σημεία ξ_i , τα οποία ικανοποιούν την Εξ. (4.7), δηλ. την εξίσωση

$$12z^4 + 9(\lambda - 1)z^2 - 3\lambda z + (\lambda - 1)^2 = 0. \quad (4.15)$$

Σημειώστε ότι οι ρίζες της Εξ. (4.15) δεν αποτελούν όλες ελκυστικά σταθερά σημεία της S_3 . Για την ειδική περίπτωση $\lambda = 1$ τα τέσσερα αυτά σταθερά σημεία είναι απωστικά (βλ. την 2η περίπτωση στη σ. 65).

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε τα πρόσθετα σταθερά σημεία της, σχετιζόμενης με τα p_λ , συνάρτησης S_3 . Διαιρώντας με το συντελεστή του z^4 ανάγουμε την Εξ. (4.15) στη μορφή

$$z^4 + 3/4(\lambda - 1)z^2 - \lambda/4z + (\lambda - 1)^2/12 = 0,$$

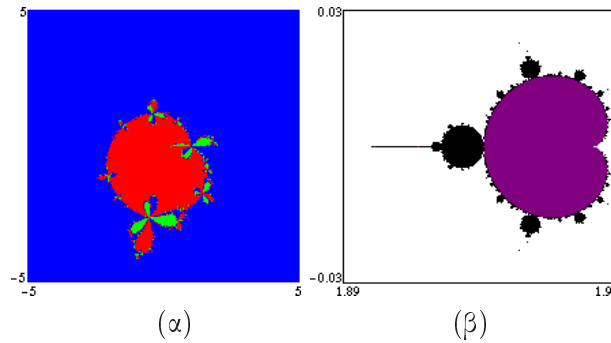


η οποία είναι της μορφής (Α'.6), όπου $p = 3/4(\lambda - 1)$, $q = -\lambda/4$ και $r = (\lambda - 1)^2/12$.

Τελικώς, από την Εξ. (Α'.7), τα πρόσθετα σταθερά σημεία που ικανοποιούν την Εξ. (4.15) είναι τα

$$z_{1,2} = \left[a \pm \sqrt{-(\lambda - 1) - y + \lambda/(2a)} \right] / 2, \quad z_{3,4} = \left[-a \pm \sqrt{-(\lambda - 1) - y - \lambda/(2a)} \right] / 2,$$

όπου $a = \sqrt{-(\lambda - 1)/2 + y}$.



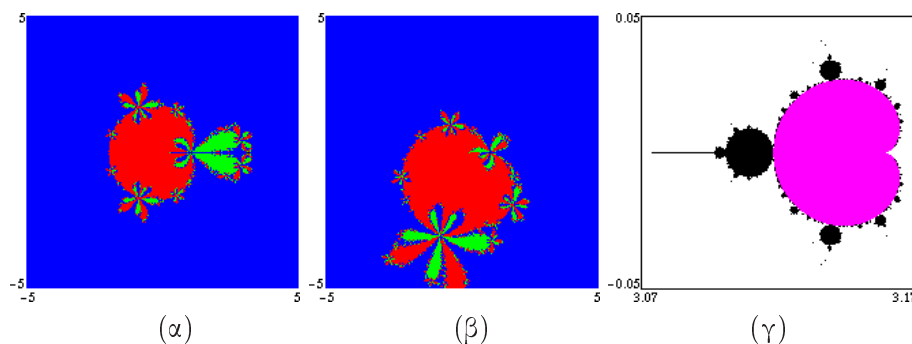
Σχήμα 4.12: (α) Επαναληπτική εφαρμογή της S_3 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ . (β) Το μιγαδικό παραμετρικό χωρίο $[1.89, 1.95] \times [-0.03, 0.03]$ του Σχήματος (α) αποκαλύπτει ένα σύνολο Mandelbrot για την S_3 .

Το Σχήμα 4.12(α) αναπαριστά περιοχές του $[-5, 5] \times [-5, 5]$ στον παραμετρικό χώρο των λ για τις οποίες το κρίσιμο σημείο c_1 έλκεται προς τις z_i^* . Το Σχήμα 4.12(β) αποτελεί μεγέθυνση της περιοχής $[1.89, 1.95] \times [-0.03, 0.03]$, αλλά είναι ανακλασμένο γύρω από τον πραγματικό άξονα. Το πάνω μισό (συμπεριλαμβανομένου του πραγματικού άξονα) αυτού του, τύπου Mandelbrot, συνόλου, αντιστοιχεί στις τιμές των λ για τις οποίες το c_1 δε συγκλίνει προς τις z_i^* : το κάτω μισό αντιστοιχεί στο κρίσιμο σημείο c_2 . Η κεραιόχρους περιοχή αντιστοιχεί στις τιμές των λ , για τις οποίες ισχύει η ιδιότητα (ii). Παρατηρούμε ότι αυτή η περιοχή αποτελεί το εσωτερικό του μεγαλύτερου καρδιοειδούς του συνόλου Mandelbrot, το οποίο τέμνει τον πραγματικό άξονα των λ στο, κατά προσέγγιση, διάστημα $[1.921, 1.945]$.

3η περίπτωση, $\sigma = 4$: Στη περίπτωση αυτή υπάρχουν, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, δύο δυνατότητες για τις τροχιές των c_i να παγιδευτούν μακριά από τις ρίζες z_i^* : (i) σύγκλιση προς έναν κύκλο μήκους $k \geq 2$ ή (ii) σύγκλιση προς πρόσθετα ελκυστικά σταθερά σημεία τ_i , τα οποία ικανοποιούν την Εξ. (4.7), δηλ. την εξίσωση

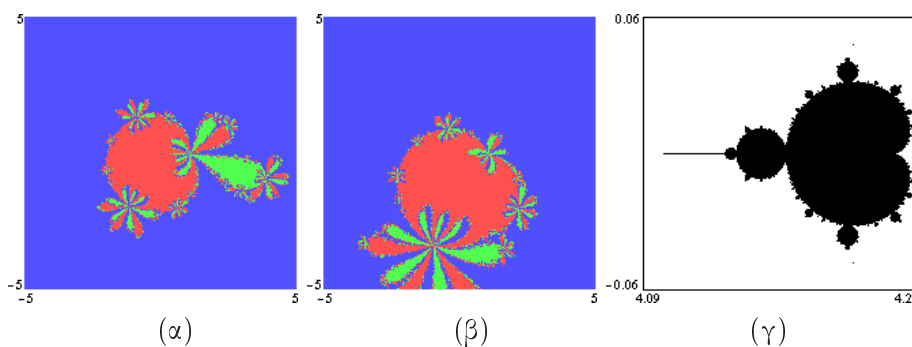
$$123z^8 + 182(\lambda - 1)z^6 - 57\lambda z^5 + 88(\lambda - 1)^2 z^4 - 46\lambda(\lambda - 1)z^3 + 14(\lambda - 1)^3 z^2 + 15\lambda^2 z^2 - \lambda(\lambda - 1)^2 z - \lambda^2(\lambda - 1) + (\lambda - 1)^4 = 0. \quad (4.16)$$

Σημειώστε ότι οι ρίζες της Εξ. (4.16) δεν αποτελούν όλες ελκυστικά σταθερά σημεία της S_4 .

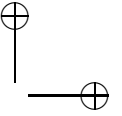
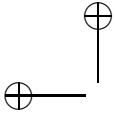


Σχήμα 4.13: (α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της S_4 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ . (γ) Το μιγαδικό παραμετρικό χωρίο $[3.07, 3.17] \times [-0.05, 0.05]$ του Σχήματος (α) αποκαλύπτει ένα σύνολο Mandelbrot για την S_4 .

Τα Σχήματα 4.13(α) και 4.13(β) αναπαριστούν περιοχές του $[-5, 5] \times [-5, 5]$ στον παραμετρικό χώρο των λ για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_3 , αντιστοίχως, έλκονται προς τις z_i^* . Οι μαύρες περιοχές αναπαριστούν πάλι σύνολα παραμετρικών τιμών για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία δε συγγλίνουν προς μία ρίζα της $p_\lambda(z) = 0$. Το Σχήμα 4.13(γ) αποτελεί μεγέθυνση της περιοχής $[3.07, 3.17] \times [-0.05, 0.05]$ του Σχήματος 4.13(α) εμφανίζοντας ένα, σχετιζόμενο με το c_3 , σύνολο τύπου Mandelbrot. Η ανοικτή κεραμόχρους περιοχή αντιστοιχεί στις τιμές των λ για τις οποίες ισχύει η ιδιότητα (ii). Αυτή η περιοχή αποτελεί ξανά το εσωτερικό του μεγαλύτερου καρδιοειδούς του συνόλου Mandelbrot, το οποίο τέμνει τον πραγματικό άξονα των λ στο, κατά προσέγγιση, διάστημα $[3.119, 3.1596]$.



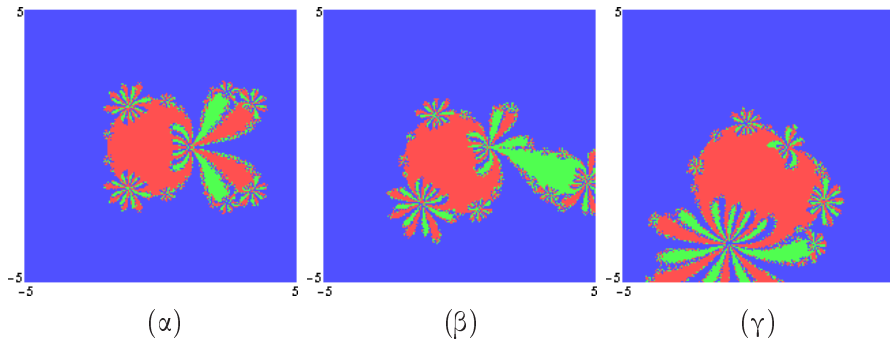
Σχήμα 4.14: (α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της S_5 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ . (γ) Το μιγαδικό παραμετρικό χωρίο $[4.09, 4.21] \times [-0.06, 0.06]$ του Σχήματος (α) αποκαλύπτει ένα σύνολο Mandelbrot για την S_5 .



4η περίπτωση, $\sigma = 5$: Στη περίπτωση αυτή υπάρχουν, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, δύο δυνατότητες για τις τροχιές των c_i να παγιδευτούν μακριά από τις ρίζες z_i^* : (i) σύγκλιση προς έναν κύκλο μήκους $k \geq 2$ ή (ii) σύγκλιση προς πρόσθετα ελκυστικά σταθερά σημεία, τα οποία ικανοποιούν την Εξ. (4.7), δηλ. την εξίσωση

$$\begin{aligned} & 1197z^{12} + 2631(\lambda - 1)z^{10} - 783\lambda z^9 + 2232(\lambda - 1)^2 z^8 - 1251(\lambda - 1)\lambda z^7 \\ & + [881(\lambda - 1)^3 + 405\lambda^2]z^6 - 522(\lambda - 1)^2 \lambda z^5 \\ & + [166(\lambda - 1)^4 + 306(\lambda - 1)\lambda^2]z^4 + [-7(\lambda - 1)^3 \lambda - 90\lambda^3]z^3 \\ & + [20(\lambda - 1)^5 - 36(\lambda - 1)^2 \lambda^2]z^2 + [-(\lambda - 1)^4 \lambda + 15(\lambda - 1)\lambda^3]z \\ & + (\lambda - 1)^6 - (\lambda - 1)^3 \lambda^2 = 0. \end{aligned}$$

Τα Σχήματα 4.14(α) και (β) αναπαριστούν περιοχές του $[-5, 5] \times [-5, 5]$ στον παραμετρικό χώρο των λ , για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_3 , αντιστοίχως, έλκονται προς τις ρίζες z_i^* . Το Σχήμα 4.14(γ) αποτελεί μεγέθυνση της περιοχής $[4.09, 4.21] \times [-0.06, 0.06]$ του Σχήματος 4.14(α), η οποία εμφανίζει ένα, σχετιζόμενο με το c_1 αλλά ανακλασμένο γύρω από τον πραγματικό άξονα, σύνολο τύπου Mandelbrot.

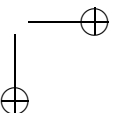
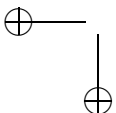


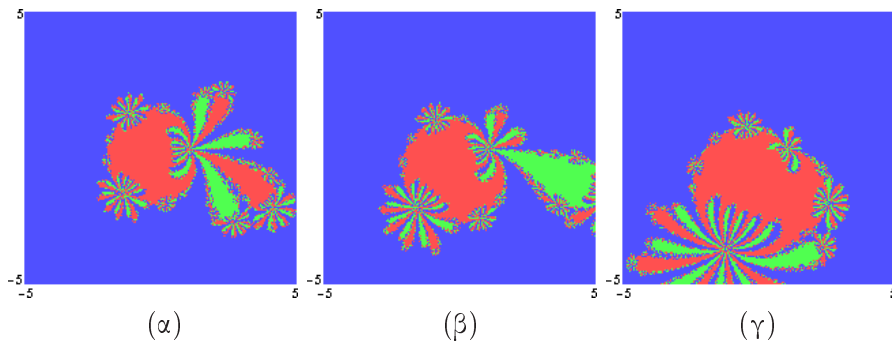
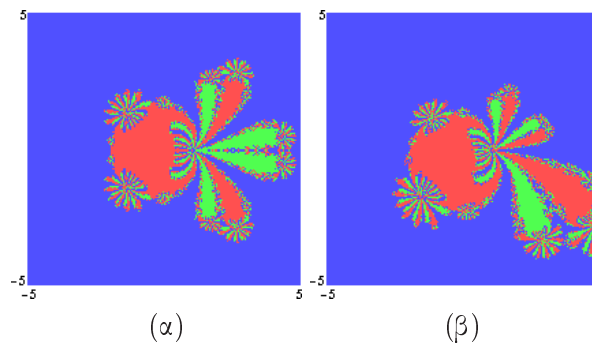
Σχήμα 4.15: Επαναληπτική εφαρμογή της S_6 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ .

5η περίπτωση, $\sigma = 6$: Τα Σχήματα 4.15(α), (β) και (γ) αναπαριστούν περιοχές του $[-5, 5] \times [-5, 5]$ στον παραμετρικό χώρο των λ για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία c_5 , c_1 και c_3 , αντιστοίχως, έλκονται προς τις ρίζες z_i^* .

6η περίπτωση, $\sigma = 7$: Τα Σχήματα 4.16(α), (β) και (γ) αναπαριστούν περιοχές του $[-5, 5] \times [-5, 5]$ στον παραμετρικό χώρο των λ για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία c_1 , c_3 και c_5 , αντιστοίχως, έλκονται προς τις ρίζες z_i^* .

7η περίπτωση, $\sigma = 8$: Τα Σχήματα 4.17(α), (β) και 4.18(α), (β) αναπαριστούν περιοχές του $[-5, 5] \times [-5, 5]$ στον παραμετρικό χώρο των λ για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία c_7 , c_1 , c_3 και c_5 , αντιστοίχως, έλκονται προς τις ρίζες z_i^* .



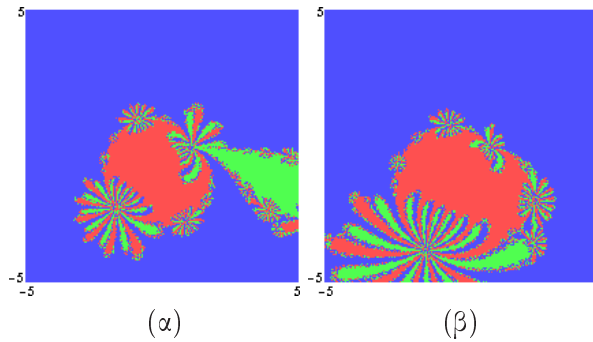
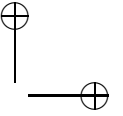
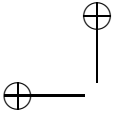
Σχήμα 4.16: Επαναληπτική εφαρμογή της S_7 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ .Σχήμα 4.17: Επαναληπτική εφαρμογή της S_8 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ .

8η περίπτωση, $\sigma = 9$: Τα Σχήματα 4.19(α), (β) και 4.20(α), (β) αναπαριστούν περιοχές του $[-5, 5] \times [-5, 5]$ στον παραμετρικό χώρο των λ για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία c_1, c_3, c_5 και c_7 , αντιστοίχως, έλκονται προς τις ρίζες z_i^* .

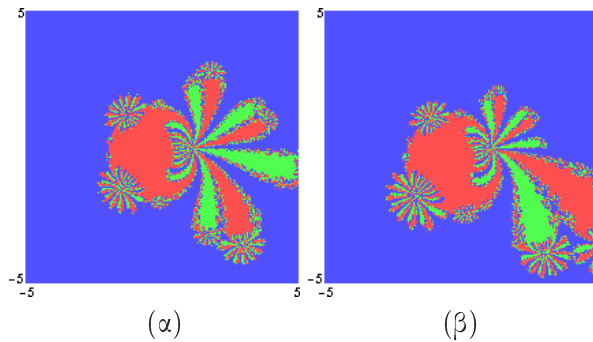
9η περίπτωση, $\sigma = 10$: Τα Σχήματα 4.21(α), (β) και 4.22(α), (β), (γ) αναπαριστούν περιοχές του $[-5, 5] \times [-5, 5]$ στον παραμετρικό χώρο των λ για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία c_9, c_1, c_3, c_5 και c_7 , αντιστοίχως, έλκονται προς τις ρίζες z_i^* .

Εδώ ανακαλύπτουμε νέες οικογένειες σχημάτων και, συνεπώς, νέα φαινόμενα, τα οποία εμφανίζονται εξ' αιτίας του υπολογισμού των κρίσιμων σημείων για τάξη υψηλότερη από τέσσερα, κάτι το οποίο δεν πραγματεύθηκε η [156].

Η κατάταξη αυτών των οικογενειών γίνεται ως προς φθίνουσα τάξη των $b_{i,\sigma}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, [(\sigma - 1)/2]$, $\sigma = 3, 4, \dots, 10$, και γίνεται ως εξής: Μία οικογένεια σχετίζεται με το μέγιστο των $b_{i,\sigma}$, δηλ. το $\max\{b_{i,\sigma} : i = 1, 2, \dots, [(\sigma - 1)/2]\}$ για κάθε $\sigma > 2$. Τότε παρατηρούμε ότι κάθε $b_{i,\sigma}$ διαφέρει από το προηγούμενό του κατά μία ποσότητα γύρω στο 0.1. Οι σχετικές, με αυτήν την οικογένεια, εικόνες είναι τα Σχήματα 4.12(α), 4.13(β), 4.14(β), 4.15(γ), 4.16(γ), 4.18(β), 4.20(β) και 4.22(γ). Η



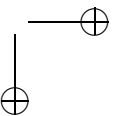
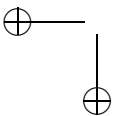
Σχήμα 4.18: Επαναληπτική εφαρμογή της S_8 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ .

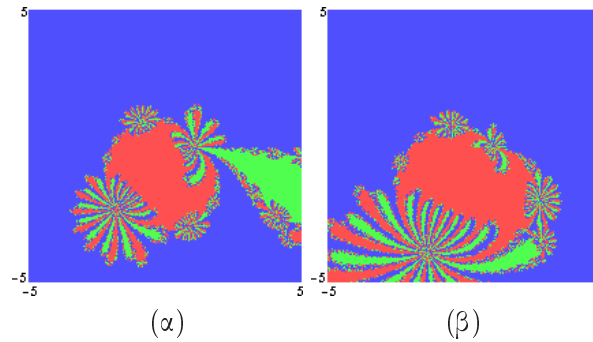
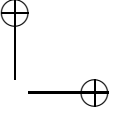
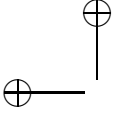
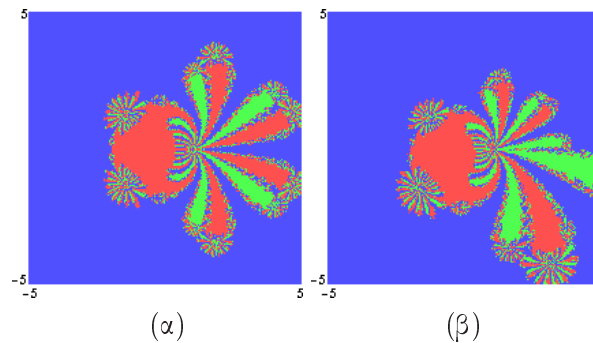


Σχήμα 4.19: Επαναληπτική εφαρμογή της S_9 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ .

επόμενη οικογένεια, η οποία αντιστοιχεί στο αμέσως μικρότερο $h_{i,\sigma}$, αποτελείται από τα Σχήματα 4.14(α), 4.15(β), 4.16(β), 4.18(α), 4.20(α) και 4.22(β). Κατά παρόμοιο τρόπο καταλήγουμε στην οικογένεια των Σχημάτων 4.13(α), 4.15(α), 4.17(α) και 4.21(α), αντιστοιχούσα στο κρίσιμο σημείο $z = 0$, το οποίο, φυσικά, συναντούμε μόνο για άρτιες τιμές του σ .

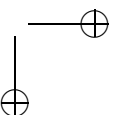
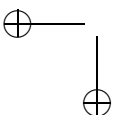
Παρατηρούμε ότι ένα κοινό χαρακτηριστικό όλων των οικογενειών, είναι η ύπαρξη ενός «κυρίου άνθους». Κατόπιν, η «πολυπλοκότητά» τους αυξάνεται σύμφωνα με την τάξη σ των απεικονίσεων S_σ και με κάθε αύξηση εμφανίζονται νέα σύνολα «πετάλων», ένα εντός και ένα εκτός του άνθους. Αν κοιτάξουμε την ομάδα των πετάλων που βρίσκεται στην περίμετρο του άνθους, εκτός από αυτήν κοντά στην αρχή των αξόνων, βλέπουμε ότι ξεπροβάλλει ένα νέο ζευγάρι πετάλων σε κάθε μεριά. Σ' αυτές τις ομάδες σημειώστε επίσης την ύπαρξη, έξω απ' το κύριο άνθος, ενός χωριστού και ανεξαρτήτου των άλλων ζευγών πετάλων «βλαστού». Η ομάδα που βρίσκεται στην περιοχή της αρχής των αξόνων, αναπτύσσεται, παρά ταύτα, διαφορετικά. Με κάθε αύξηση το νέο ζεύγος πετάλων ξεπροβάλλει μόνο μέσα στο άνθος, όπως και

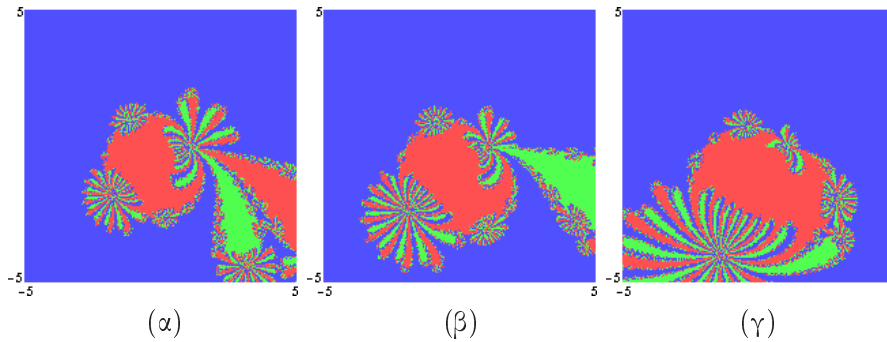


Σχήμα 4.20: Επαναληπτική εφαρμογή της S_9 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ .Σχήμα 4.21: Επαναληπτική εφαρμογή της S_{10} στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ .

στις άλλες ομάδες. Σημειώστε εδώ, επίσης, το αντίστροφο αυτού που παρατηρήσαμε στην προηγούμενη ομάδα, εκτός της οικογένειας που αντιστοιχεί στο κρίσιμο $z = 0$: δηλ. ο «βλαστός» που αναφέρθηκε προηγουμένως, βρίσκεται τώρα μέσα στο άνθος. Το άλλο διαφορετικό, γι' αυτήν την ομάδα, χαρακτηριστικό που πρέπει να σημειώσουμε εδώ, είναι η εμφάνιση μιας κάπως εναλλασσόμενης διαδικασίας: όταν, με μια αύξηση του σ , ξεπροβάλλει ένας βλαστός έξω από το άνθος, με την επόμενη αύξηση μετατρέπεται στο συνηθισμένο ζεύγος πετάλων. Ξανά πρέπει να εξαιρεθεί από αυτό η οικογένεια που αντιστοιχεί στο κρίσιμο σημείο $z = 0$.

Μια κοντινή εξέταση όλων αυτών των φαινομένων οδηγεί στα εξής συμπεράσματα: Πρωτίστως, όλη η διαδικασία τείνει προς μια συμμετρική μορφή, με οριακό εκπρόσωπο την οικογένεια που αντιστοιχεί στο κρίσιμο σημείο $z = 0$: δεύτερον, μπορούμε να φανταστούμε τις μορφές των σχημάτων για $\sigma > 10$.





Σχήμα 4.22: Επαναληπτική εφαρμογή της S_{10} στην οικογένεια των πολυωνύμων p_{λ} .

4.2.7 Λεκάνες έλξης σχετιζόμενες με παθολογικούς ελκυστικούς κύκλους

Επειδή οι μαύρες περιοχές που ανακαλύψαμε στον παραμετρικό χώρο εκφράζουν τη μορφολογία και τα κλασσικά χαρακτηριστικά των συνόλων Mandelbrot, δεν πρέπει να μας εκπλήσσει ο ακόλουθος

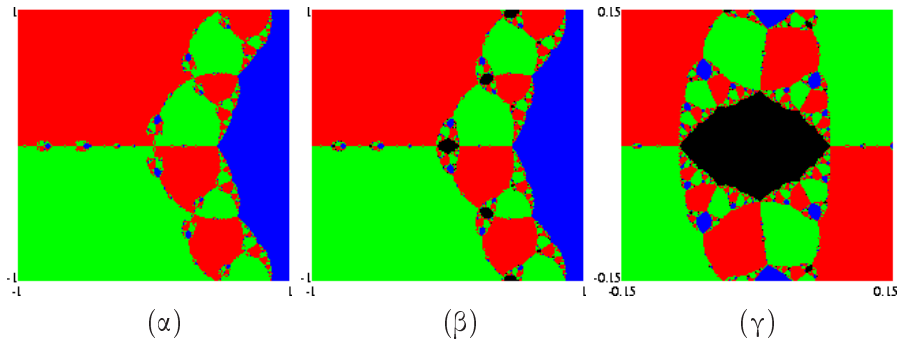
Ορισμός 4.2.1 Το, σχετιζόμενο με την επαναληπτική μέθοδο S_{σ} , σύνολο Mandelbrot ως προς τα κυβικά πολυώνυμα p_{λ} είναι το σύνολο

$$\mathcal{M}_{\sigma}(\lambda) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \text{υπάρχουν ελκυστικοί κύκλοι μήκους } k \text{ για κάθε } k = 1, 2, \dots \text{ της } S_{\sigma} \text{ διαφορετικοί των ριζών } z_i^* \text{ της } p_{\lambda}(z) = 0 \}.$$

Στο εδάφιο αυτό μελετούμε τη συμπεριφορά εκείνων των ελκυστικών σταθερών σημείων των απεικονίσεων Schröder που οδηγούν σε παθολογικούς κύκλους, δηλαδή σε σημεία ή κύκλους που δεν αντιστοιχούν στις επιθυμητές ρίζες.

Συγκεκριμένα, εξετάζουμε τις επιδράσεις των περιοχών τύπου Mandelbrot, $\mathcal{M}_{\sigma}(\lambda)$, του παραμετρικού χώρου των λ ανακαλυφθέντες στο Εδάφιο 4.2.6, πάνω στις λεκάνες έλξης και στα σύνολα Julia μέσα στο χώρο των μιγαδικών συντεταγμένων. Για κάθε $\lambda \in \mathcal{M}_{\sigma}(\lambda)$, η ακολουθία των επαναλήψεων $(S_{\sigma}^n)_{n=1}^{\infty}$ παράγει ελκυστικούς κύκλους μήκους $k \geq 1$ διαφορετικούς από τις ρίζες της $p_{\lambda}(z) = 0$.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται εικόνες λεκανών έλξης, οι οποίες αντιστοιχούν στις «κρίσιμες» τιμές $\lambda \in \mathcal{M}_{\sigma}(\lambda)$ και στις γειτονικές μη «κρίσιμες» τιμές για τις συναρτήσεις S_3 , S_4 και S_5 , όπως αυτές εφαρμόζονται στα κυβικά πολυώνυμα p_{λ} . Οι απεικονίσεις αυτές σχεδιάστηκαν χρησιμοποιώντας την Κατασκευή 3 που παρουσιάζεται στην Ενότητα 7.2.



Σχήμα 4.23: (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για την S_2 , όπου $\lambda = 0.37$ και $\lambda = 0.36$, αντιστοίχως. (γ) Το χωρίο $[-0.15, 0.15] \times [-0.15, 0.15]$ του Σχήματος (β) περιέχει μία από τις λεκάνες έλξης του κύκλου μήκους δύο.

Μέθοδος Schröder δεύτερης τάξης

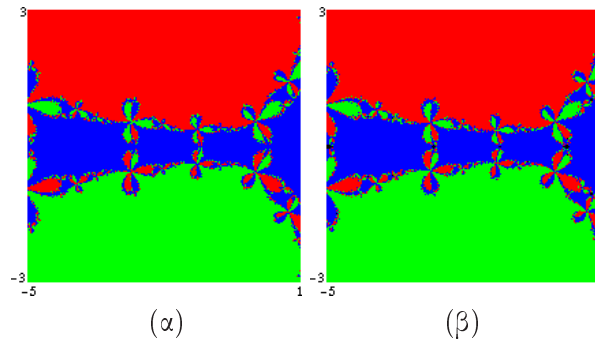
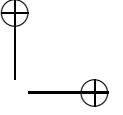
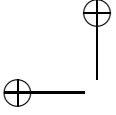
Τα Σχήματα 4.23(α) και 4.23(β) αναπαριστούν λεκάνες έλξης για το μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$, οι οποίες αντιστοιχούν στις τιμές $\lambda = 0.37$ και $\lambda = 0.36$, αντιστοίχως. Αν παρατηρήσουμε το Σχήμα 4.11(β), βλέπουμε ότι για $\lambda = 0.37$ δεν υπάρχουν άλλοι ελκυστικοί κύκλοι μήκους k εκτός των ριζών z_i^* . Για $\lambda = 0.36$ όμως, εμφανίζεται μια αξιοσημείωτη αλλαγή. Οι μαύρες περιοχές που εμφανίζονται στο Σχήμα 4.23(β), αποτελούν μέρος της λεκάνης έλξης του ελκυστικού κύκλου μήκους δύο $\xi_1 = -0.5628255$, $\xi_2 = 0.0110359$, δηλ. για τα ξ_1 και ξ_2 ισχύει $N(p_\lambda(\xi_1)) = \xi_2$. Μεγέθυνση της λεκάνης έλξης που περιέχει τα σημεία $z = 0$ και ξ_2 , εμφανίζεται στο Σχήμα 4.23(γ). Ο πολλαπλασιαστής αυτού του, μήκους δύο, κύκλου είναι $|S_2'(\xi_1)S_2'(\xi_2)| \cong 0.371$.

Μέθοδος Schröder τρίτης τάξης

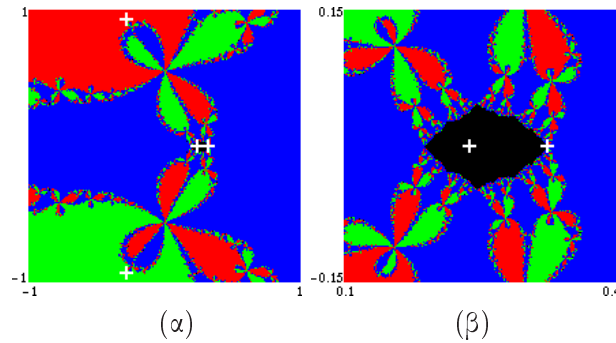
Αυτή η περίπτωση μελετήθηκε στην [156] παρουσιάζοντας εικόνες λεκανών έλξης στη μιγαδική περιοχή $[-5, 1] \times [-3, 3]$, οι οποίες αντιστοιχούν στην μη «κρίσιμη» τιμή $\lambda = 1.96$ (Σχήμα 4.24(α)) και στην $\lambda = 1.93$ (Σχήμα 4.24(β)). Είναι προφανές ότι το πέρασμα από το Σχήμα 4.24(α) προς το Σχήμα 4.24(β) αντιστοιχεί στο πέρασμα της παραμέτρου από το εξωτερικό του συνόλου τύπου Mandelbrot του Σχήματος 4.12(β) προς το εσωτερικό του. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις τιμές του λ για σύγκριση και αναφορά.

Για $\lambda = 1.96$, η λεκάνη έλξης, $A(1)$, του $z = 1$ εκτείνεται κατά μήκος του αρνητικού πραγματικού άξονα περνώντας μέσα από στενούς «πορθμούς».

Για $\lambda = 1.93$, εμφανίζεται ένα «γεφύρωμα» μεταξύ των μιγαδικών συζυγών λεκανών έλξης. Τα πρόσθετα σταθερά σημεία της S_3 για αυτήν την τιμή του λ είναι τα: $\xi_1 = 0.237564$, $\xi_2 = 0.324135$, $\xi_{3,4} = -0.28085 \pm 0.925811i$, με αντίστοιχους



Σχήμα 4.24: (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για την S_3 , όπου $\lambda = 1.96$ και $\lambda = 1.93$, αντιστοίχως.



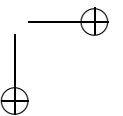
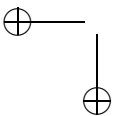
Σχήμα 4.25: (α), (β) Τα χωρία $[-1, 1] \times [-1, 1]$ και $[0.1, 0.4] \times [-0.15, 0.15]$ του Σχήματος 4.21(β), αντιστοίχως, υποδεικνύουν τη θέση των ξ_i και περιέχουν την άμεση λεκάνη έλξης της ανεπιθύμητης ρίζας ξ_1 .

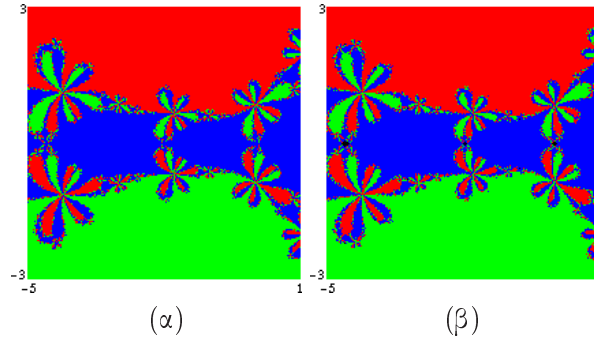
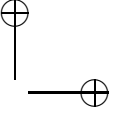
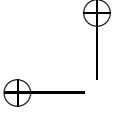
πολλαπλασιαστές $|S'_3(\xi_1)| = 0.493$, $|S'_3(\xi_2)| = 2.049$ και $|S'_3(\xi_{3,4})| = 5.279$. Παρατηρούμε ότι μόνο το ξ_1 είναι ελκυστικό, ενώ τα υπόλοιπα είναι απωστικά οπότε ανήχουν στο αντίστοιχο σύνολο Julia. Η λεκάνη έλξης, $A(\xi_1)$, του ξ_1 είναι η ένωση όλων των «γεφυρών».

Τα Σχήματα 4.25(α) και 4.25(β) αποτελούν μεγεθύνσεις των περιοχών $[-1, 1] \times [-1, 1]$ και $[0.1, 0.4] \times [-0.15, 0.15]$, αντιστοίχως, του Σχήματος 4.24(β), όπου οι σταυροί υποδεικνύουν τις θέσεις των ξ_i . Η μεγάλη μαύρη περιοχή του Σχήματος 4.25(β) αντιστοιχεί στην άμεση λεκάνη έλξης, $A^*(\xi_1)$, του ξ_1 .

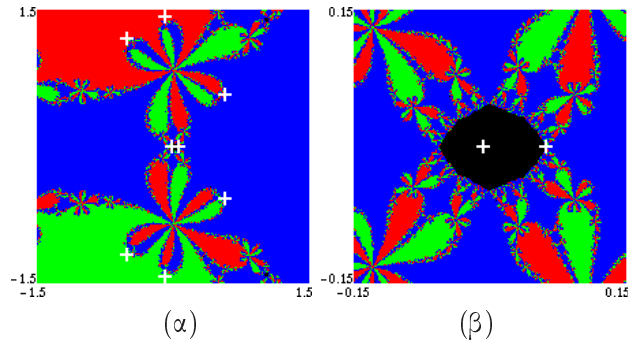
Μέθοδος Schröder τέταρτης τάξης

Τα Σχήματα 4.26(α) και 4.26(β) αναπαριστούν λεκάνες έλξης για το μιγαδικό χωρίο $[-5, 1] \times [-3, 3]$, οι οποίες αντιστοιχούν στις τιμές $\lambda = 3.17$ (μη «κρίσιμη») και $\lambda = 3.14$ (ένα πρόσθετο ελκυστικό σταθερό σημείο), αντιστοίχως. Το πέρασμα από το

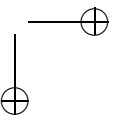
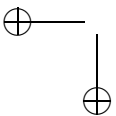


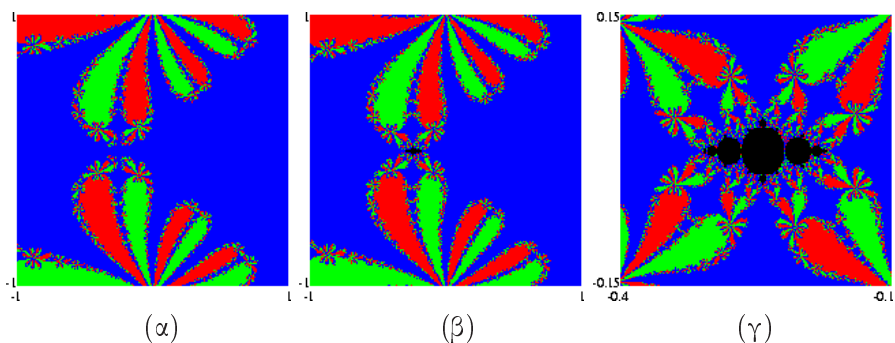


Σχήμα 4.26: (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για την S_4 , όπου $\lambda = 3.17$ και $\lambda = 3.14$, αντιστοίχως.



Σχήμα 4.27: (α), (β) Τα χωρία $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$ και $[-0.15, 0.15] \times [-0.15, 0.15]$ του Σχήματος 4.23(β), αντιστοίχως, υποδεικνύουν τη θέση των τ_i και περιέχουν την άμεση λεκάνη έλξης της ανεπιθύμητης ρίζας τ_1 .





Σχήμα 4.28: (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για τη μέθοδο S_5 , όπου $\lambda = 4.3$ και $\lambda = 4.15$, αντιστοίχως. (γ) Το χωρίο $[-0.4, -0.1] \times [-0.15, 0.15]$ του Σχήματος (β) περιέχει την άμεση λεκάνη έλξης της ελκυστικής ανεπιθύμητης ρίζας.

Σχήμα 4.26(α) προς το Σχήμα 4.26(β) αντιστοιχεί στο πέρασμα της παραμέτρου από το εξωτερικό του συνόλου τύπου Mandelbrot του Σχήματος 4.13(γ) στο εσωτερικό του συνόλου.

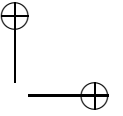
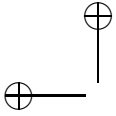
Για $\lambda = 3.17$, η λεκάνη έλξης $A(1)$ του $z = 1$ εκτείνεται κατά μήκος του αρνητικού πραγματικού άξονα περνώντας μέσα από στενούς «πορθμούς».

Για $\lambda = 3.14$, εμφανίζεται ένα «γεφύρωμα» μεταξύ των μιγαδικών συζυγών λεκανών έλξης. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Laguerre και την τεχνική γυαλισματος ριζών που περιγράφεται στην [136], βρίσκουμε τα πρόσθετα σταθερά σημεία της S_4 για αυτήν την τιμή του λ , τα οποία είναι: $\tau_1 = -0.007649$, $\tau_2 = 0.061450$, $\tau_{3,4} = -0.509332 \pm 1.186166i$, $\tau_{5,6} = -0.086961 \pm 1.425205i$ και $\tau_{7,8} = 0.569391 \pm 0.566931i$, με αντίστοιχους πολλαπλασιαστές $|S'_4(\tau_1)| = 0.321$, $|S'_4(\tau_2)| = 2.144$, $|S'_4(\tau_{3,4})| = 6.337$, $|S'_4(\tau_{5,6})| = 6.609$ και $|S'_4(\tau_{7,8})| = 7.813$. Παρατηρούμε ότι μόνο η τ_1 είναι ελκυστική, ενώ οι υπόλοιπες είναι απωστικές και ανήκουν στο αντίστοιχο σύνολο Julia. Η λεκάνη έλξης, $A(\tau_1)$, του τ_1 είναι η ένωση όλων των γεφυρών.

Τα Σχήματα 4.27(α) και 4.27(β) αποτελούν μεγεθύνσεις των περιοχών $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$ και $[-0.15, 0.15] \times [-0.15, 0.15]$, αντιστοίχως, του Σχήματος 4.26(β), όπου οι σταυροί υποδεικνύουν τις θέσεις των τ_i . Η μεγάλη σκούρα περιοχή του Σχήματος 4.27(β) αντιστοιχεί στην άμεση λεκάνη έλξης, $A^*(\tau_1)$, του τ_1 .

Μέθοδος Schröder πέμπτης τάξης

Τα Σχήματα 4.28(α) και (β) αναπαριστούν λεκάνες έλξης για τη μιγαδική περιοχή $[-1, 1] \times [-1, 1]$, οι οποίες αντιστοιχούν στις τιμές $\lambda = 4.3$ (μη «κρίσιμο») και $\lambda = 4.15$ (ένα πρόσθετο ελκυστικό σταθερό σημείο), αντιστοίχως. Το πέρασμα από το Σχήμα 4.28(α) προς το Σχήμα 4.28(β) αντιστοιχεί στο πέρασμα της παραμέτρου



από το εξωτερικό του συνόλου τύπου Mandelbrot του Σχήματος 4.14(γ) προς το εσωτερικό του. Το Σχήμα 4.28(γ) αποτελεί μεγέθυνση της περιοχής $[-0.4, -0.1] \times [-0.15, 0.15]$ του Σχήματος 4.28(β).

4.2.8 Η περίπτωση των τεταρτοβαθμίων πολυωνύμων

Ας πάρουμε τη γενική διτετράγωνη εξίσωση

$$a_4 z^4 + a_2 z^2 + a_0 = 0 \quad (4.17)$$

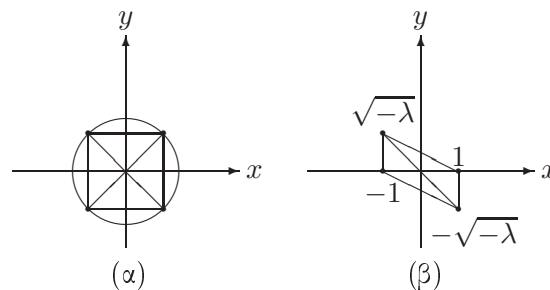
από την οποία λείπουν ο κυβικός και ο γραμμικός όρος. Η αντικατάσταση $z^2 = w$ δίνει τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$a_4 w^2 + a_2 w + a_0 = 0$$

η οποία μπορεί να αναχθεί στη Εξ. (3.1). Έτσι, μια φυσική επιλογή μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας τεταρτοβαθμίων πολυωνύμων θα ήταν η

$$q_c(z) = z^4 + c, \quad c \in \mathbb{C}$$

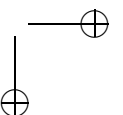
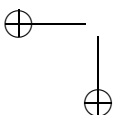
οι ρίζες της οποίας είναι οι τέταρτες ρίζες του $-c$. Αυτές οι ρίζες είναι κορυφές ενός, εγγεγραμμένου σε κύκλο, τετραγώνου κέντρου 0 και ακτίνας $\sqrt[n]{|c|}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.29(α). Το μόνο ελεύθερο κρίσιμο σημείο της, σχετιζόμενης με την q_c , S_σ για κάθε $\sigma = 2, 3, \dots$ είναι εγκατεστημένο στο $z = 0$. Αφού η πρώτη παράγωγος της q_c μηδενίζεται σ' αυτό το σημείο, η επαναληπτική μέθοδος Schröder δεν μπορεί να εφαρμοσθεί σ' αυτήν την περίπτωση.



Σχήμα 4.29: Γεωμετρική αναπαράσταση των ριζών των εξισώσεων $q_c(z) = 0$ και $q_\lambda(z) = 0$, αντιστοίχως.

Οιοδήποτε πολυώνυμο τετάρτου βαθμού μπορεί να αναχθεί στη μορφή $q(z) = z^4 + Az^2 + Bz - \Gamma$. Αν απαιτήσουμε $q(1) = q(-1) = 0$, έχουμε ότι $B = 0$ και $A = \Gamma - 1$ εφόσον $A \neq 0 \neq \Gamma$. Είναι ενδιαφέρον, λοιπόν, να εξετάσουμε τη δυναμική της επαναληπτικής μεθόδου Schröder, η οποία σχετίζεται με τη συγκεκριμένη μονοπαραμετρική οικογένεια διτετράγωνων πολυωνύμων

$$q_\lambda(z) = z^4 + (\lambda - 1)z^2 - \lambda = (z - 1)(z + 1)(z^2 + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$



οι ρίζες της οποίας είναι οι $z_{1,2}^* = \pm 1$ και $z_{3,4}^* = \pm\sqrt{-\lambda}$. Αυτές οι ρίζες είναι κορυφές ενός παραλληλογράμμου, δύο εκ των οποίων κείνται επί του μοναδιαίου κύκλου, όπως εικονογραφούνται στο Σχήμα 4.29(β). Άρα, οι ρίζες δύο διτετράγωνων της μορφής (4.17) σχετίζονται μέσω ενός μετασχηματισμού Möbius, επειδή ο μη αρμονικός λόγος των ριζών συμφωνεί.

Παρατηρήστε την εξάρτηση των z_3^* και z_4^* από το λ . Τα διτετράγωνα πολυώνυμα q_λ είναι ακριβώς τα τεταρτοβάθμια πολυώνυμα με μεγιστοβάθμιο συντελεστή μονάδα, στα οποία ο κυβικός και ο γραμμικός όρος απουσιάζουν, των οποίων οι ρίζες αθροίζουν στο μηδέν και που έχουν τα ± 1 ως ρίζες. Η οικογένεια q_λ περιέχει όλα τα διτετράγωνα πολυώνυμα εκτός του z^4 .

Θα εργαστούμε, λοιπόν, στον παραμετρικό χώρο των λ , όπου $\lambda \in \mathbb{C}$. Η δυναμική κάθε απεικόνισης Schröder, S_σ , μελετήθηκε στον παραμετρικό χώρο κατά τον ίδιο τρόπο, όπως και στο Εδάφιο 4.2.5 (πρβ. Κατασκευή 1 στην Ενότητα 7.3).

Για κάθε σημείο $\lambda = \text{Re}(\lambda) + i \text{Im}(\lambda)$ η q_λ , ως γνωστόν, αναπαριστά ένα δυναμικό σύστημα με τα δικά του σταθερά σημεία, πιθανούς ελκυστικούς κύκλους και σύνολα Julia. Η ειδική περίπτωση $\lambda = 1$ καλύφθηκε ήδη στο Εδάφιο 4.2.5 για $n = 4$. Υπάρχουν περιοχές του παραμετρικού χώρου των λ , όπου ελκυστικοί περιοδικοί κύκλοι συνυπάρχουν με τα ελκυστικά σταθερά σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες της $q_\lambda(z) = 0$. Πρόσθετα σταθερά σημεία αντιστοιχούντα στις ρίζες της Εξ. (4.7) που φαίνονται απωστικά για $\lambda = 1$, μπορούν να καταλήξουν ελκυστικά σε περιοχές του επιπέδου των λ . Για να ανακαλύψουμε την ύπαρξη ελκυστικών κύκλων, οι οποίοι συγκρούονται με την αναζήτηση κατά Schröder για τις z_i^* , παρατηρούμε τις τροχιές των κρίσιμων σημείων των συναρτήσεων S_σ . Τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία $c_i, i = 1, 2, \dots, 2(\sigma - 1)$ των τριών πρώτων συναρτήσεων S_σ που σχετίζονται με τις q_λ , υπολογίζονται ως ακολούθως.

Εύρεση των ελεύθερων κρίσιμων σημείων της, σχετιζόμενης με την q_λ, S_σ για $\sigma = 2, 3, 4$

Στην περίπτωση $\sigma = 2$ τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση

$$6z^2 + (\lambda - 1) = 0. \quad (4.18)$$

Έτσι, τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία που ικανοποιούν την Εξ. (4.18) είναι τα

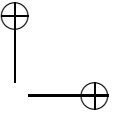
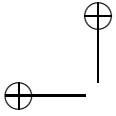
$$c_{1,2} = \pm\sqrt{-(\lambda - 1)/6}.$$

Στην περίπτωση $\sigma = 3$ τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση

$$28z^4 + 8(\lambda - 1)z^2 + (\lambda - 1)^2 = 0, \quad (4.19)$$

η οποία είναι της μορφής

$$aw^2 + bw + c = 0,$$



όπου $w = z^2$, $a = 28$, $b = 8(\lambda - 1)$ και $c = (\lambda - 1)^2$. Έτσι, τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία που ικανοποιούν την Εξ. (4.19) είναι τα

$$c_{1,2} = \pm \sqrt{(-0.1428571 + 0.1237179i)(\lambda - 1)},$$

$$c_{3,4} = \pm \sqrt{(-0.1428571 - 0.1237179i)(\lambda - 1)}.$$

Στην περίπτωση $\sigma = 4$ τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση

$$616z^6 + 236(\lambda - 1)z^4 + 54(\lambda - 1)^2z^2 + 5(\lambda - 1)^3 = 0, \quad (4.20)$$

η οποία είναι της μορφής (Α'.1), όπου $x = z^2$, $a = 236/616(\lambda - 1)$, $b = 54/616(\lambda - 1)^2$ και $c = 5/616(\lambda - 1)^3$. Λαμβάνουμε τη λύση της Εξ. (Α'.1) από την Εξ. (Α'.4). Έτσι, τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία που ικανοποιούν την Εξ. (4.20) είναι τα

$$c_{1,2} = \pm \sqrt{-0.1552374(\lambda - 1)}, \quad c_{3,4} = \pm \sqrt{(-0.1139397 + 0.1982540i)(\lambda - 1)},$$

$$c_{5,6} = \pm \sqrt{(-0.1139397 - 0.1982540i)(\lambda - 1)}.$$

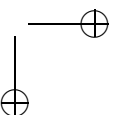
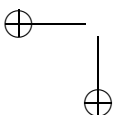
Περίπατος στον παραμετρικό χώρο

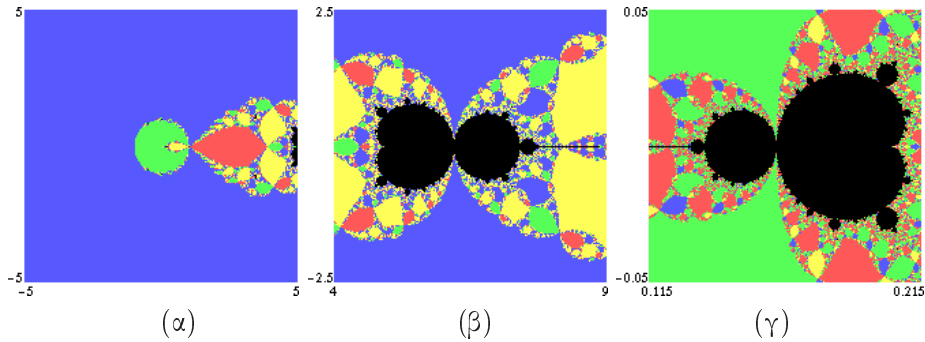
Αφού κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει ακριβώς δύο τετραγωνικές ρίζες, ορίζουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα, $+\sqrt{z}$, του z , να είναι αυτή με θετικό πραγματικό μέρος ή, αν ο z είναι γνήσιος φανταστικός, αυτή με θετικό φανταστικό μέρος. Σημειώστε ότι οι z_1^* και z_2^* βρίσκονται στις απέναντι πλευρές του άξονα των y , ενώ οι z_3^* και z_4^* είναι γενικώς απέναντι, επειδή η μία είναι αντίθετη της άλλης. Άρα οι αντίστοιχες απεικονίσεις του παραμετρικού χώρου των κρίσιμων σημείων $c_{i+1} = -c_i$ λαμβάνονται μετά από εναλλαγή των χρωμάτων, το γαλάζιο με το κίτρινο, το κόκκινο με το πράσινο και αντιστρόφως.

1η περίπτωση. $\sigma = 2$: Το Σχήμα 4.30(α) αναπαριστά περιοχές του $[-5, 5] \times [-5, 5]$ στον παραμετρικό χώρο των λ για τις οποίες το κρίσιμο σημείο c_1 έλκεται προς τις z_i^* . Τα Σχήματα 4.30(β) και 4.30(γ) αποτελούν, αντιστοίχως, μεγεθύνσεις των περιοχών $[4, 9] \times [-2.5, 2.5]$ και $[0.115, 0.215] \times [-0.05, 0.05]$ του Σχήματος 4.30(α).

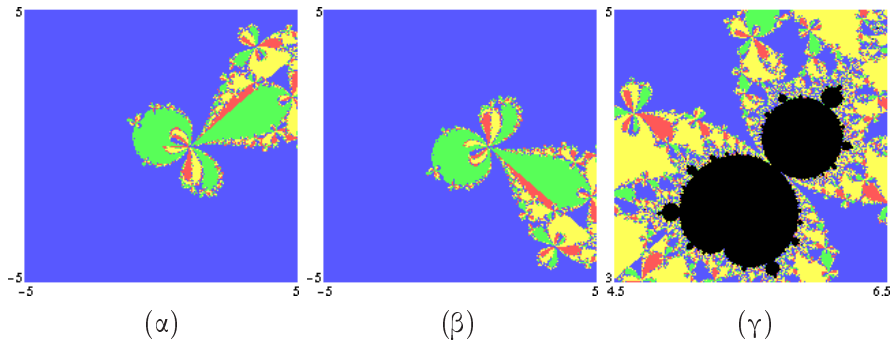
2η περίπτωση. $\sigma = 3$: Τα Σχήματα 4.31(α) και 4.31(β) αναπαριστούν την περιοχή $[-5, 5] \times [-5, 5]$ του παραμετρικού χώρου των λ για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_3 , αντιστοίχως, έλκονται προς τα z_i^* . Προσέξτε ότι ο παραμετρικός χώρος για το κρίσιμο σημείο c_3 επιτυγχάνεται μέσω ανάκλασης του Σχήματος 4.31(α) γύρω από τον άξονα των $\text{Re}(\lambda)$, εξ αιτίας του συζυγούς μιγαδικού αριθμού μέσα στη ρίζα. Το Σχήμα 4.31(γ) αποτελεί μεγέθυνση του χωρίου $[4.5, 6.5] \times [3, 5]$ του Σχήματος 4.31(α) εμφανίζοντας ένα σύνολο τύπου Mandelbrot που σχετίζεται με το c_1 .

3η περίπτωση. $\sigma = 4$: Τα Σχήματα 4.32(α) και 4.32(β) αναπαριστούν την περιοχή $[-5, 5] \times [-5, 5]$ του παραμετρικού χώρου των λ για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία





Σχήμα 4.30: (α) Επαναληπτική εφαρμογή της S_2 στην οικογένεια των πολυωνύμων q_λ . (β), (γ) Τα χωρία $[4, 9] \times [-2.5, 2.5]$ και $[0.115, 0.215] \times [-0.05, 0.05]$ του Σχήματος (α), αντιστοίχως, εμφανίζουν σύνολα τύπου Mandelbrot για την S_2 .

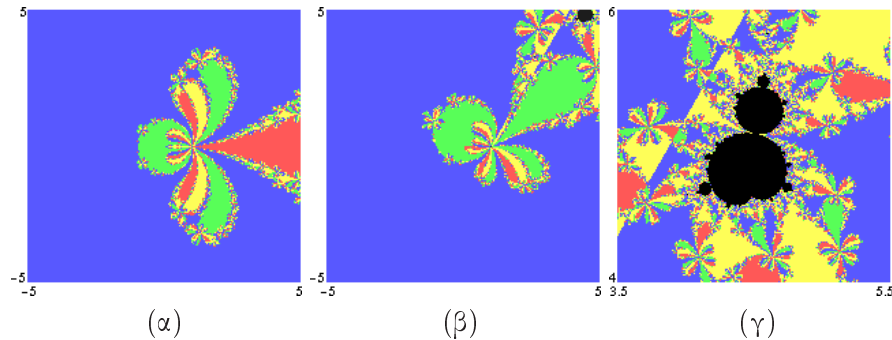


Σχήμα 4.31: (α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της S_3 στην οικογένεια των πολυωνύμων q_λ . (γ) Το μιγαδικό χωρίο $[4.5, 6.5] \times [3, 5]$ του Σχήματος (α) αποκαλύπτει ένα σύνολο τύπου Mandelbrot για την S_3 .

c_1 και c_3 , αντιστοίχως, έλκονται προς τα z_i^* . Ο παραμετρικός χώρος για το κρίσιμο σημείο c_5 επιτυγχάνεται μέσω ανάκλασης του Σχήματος 4.32(β) γύρω απ' τον άξονα των $\text{Re}(\lambda)$. Το Σχήμα 4.32(γ) αποτελεί μεγέθυνση της περιοχής $[3.5, 5.5] \times [4, 6]$ του Σχήματος 4.31(β) εμφανίζοντας ένα σύνολο τύπου Mandelbrot που σχετίζεται με το c_3 .

4.3 Επαναληπτική μέθοδος König

Η δυναμική της επαναληπτικής μεθόδου König μελετήθηκε για πρώτη φορά, μετά την κατασκευή τους το 1884, στην [157] και σε μεγαλύτερο βάθος στην [5]. Οι επαναληπτικές συναρτήσεις König αποτελούν και αυτές με τη σειρά τους μια οικογένεια ρητών επαναληπτικών συναρτήσεων, οι οποίες είναι σχεδιασμένες, ώστε να



Σχήμα 4.32: (α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της S_4 στην οικογένεια των πολυωνύμων q_λ . (γ) Το μιγαδικό χωρίο $[3.5, 5.5] \times [4, 6]$ του Σχήματος (β) αποκαλύπτει ένα σύνολο τύπου Mandelbrot για την S_4 .

συγκλίνουν με τάξη $\sigma \geq 2$ προς τις ρίζες μιας συνάρτησης f .

4.3.1 Κατασκευή των συναρτήσεων König

Έστωσαν

$$f(w) = a_0(z) + (w - z)a_1(z) + \dots,$$

$$g(w) = b_0(z) + (w - z)b_1(z) + \dots$$

και

$$h(w) = g(w)/f(w) = c_0(z) + (w - z)c_1(z) + \dots,$$

όπου οι f και g είναι αναλυτικές σε κάποιον τόπο T . Για δοθέν z , αν υπάρχει κάποιος κύκλος γύρω από το z που να περιέχει μία και μόνο απλή ρίζα r της $f(z) = 0$, τότε, από το Θεώρημα του König (βλ. [92], Θεώρημα 3.1.1, σ. 116),

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{c_\sigma(z)}{c_{\sigma+1}(z)} = r - z.$$

Είναι λογικό να αναμένουμε εδώ ότι, τουλάχιστον για αρκετά μεγάλο σ , η

$$\psi_\sigma(z) = z + \frac{c_{\sigma-2}(z)}{c_{\sigma-1}(z)} \quad (4.21)$$

πρέπει να ορίζει μια συγκλίνουσα επαναληπτική μέθοδο. Στην πραγματικότητα, η (4.21) ορίζει μια επαναληπτική μέθοδο τάξης σ για $\sigma \geq 2$. Επειδή

$$c_\sigma(z) = \frac{(g/f)^{(\sigma)}}{\sigma!},$$

από την (4.21) έπεται γενικώς ότι

$$\psi_\sigma(z) = z + (\sigma - 1) \frac{\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)^{(\sigma-2)}}{\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)^{(\sigma-1)}}.$$

Για την απόδειξη του αποτελέσματος αυτού μπορεί, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης, να ανατρέξει στα [100], [91] ή [92].

Ορίζουμε τις επαναληπτικές συναρτήσεις *König* ως

$$K_\sigma(z) = z + (\sigma - 1) \frac{\left(\frac{1}{f(z)}\right)^{(\sigma-2)}}{\left(\frac{1}{f(z)}\right)^{(\sigma-1)}}, \quad \sigma = 2, 3, \dots \quad (4.22)$$

Παρατηρούμε ότι η K_2 ταυτίζεται με την επαναληπτική συνάρτηση (4.1) των *Newton–Raphson*, ενώ η K_3 ταυτίζεται με την επαναληπτική συνάρτηση του *Halley*

$$H(z) = z - \frac{f(z)/f'(z)}{1 - f(z)f''(z)/\{2[f'(z)]^2\}}.$$

Περισσότερες πληροφορίες για τη μέθοδο του *Halley* εφαρμοζόμενη στα πολυώνυμα $f_n(z) = z^n - 1$ και $g_n(z) = z(z^n - 1)$ για κάθε $n = 2, 3, \dots$ υπάρχουν στις [132] και [139].

4.3.2 Ανακατασκευή των συναρτήσεων *König*

Παρατηρούμε ότι και η μέθοδος *König* έχοντας αριθμητή $(\sigma - 1)(d - 1) + 1$ βαθμού, όπου $d = \deg(f)$, είναι τύπου *Newton–Raphson*. Παρατηρούμε ότι αν $f(z^*) = 0$, τότε $K_\sigma^{(i)}(z^*) = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, \sigma - 1$. Επομένως, η επαναληπτική ακολουθία $z_{k+1} = K_\sigma(z_k)$, $\sigma = 2, 3, \dots$ συγκλίνει «τοπικώς» προς τις ρίζες z_i^* , $i = 1, 2, \dots, d$ της $f(z) = 0$, καθώς $O(|z_n - z_i^*|^\sigma)$. Είναι προφανές ότι η κατασκευή των K_σ απαιτεί τη γνώση των πρώτων $\sigma - 1$ παραγώγων της f στο σημείο z . Άρα, η παραπάνω μορφή της Εξ. (4.22) δεν είναι εύχρηστη ούτε για γενικευμένους υπολογισμούς ούτε για τον προγραμματισμό όλων των όρων των K_σ . Για να εξαλείψουμε αυτή τη δυσχέρεια, εισάγουμε την ακόλουθη κατασκευή υποθέτοντας ότι όλες οι ρίζες της f είναι απλές.

Ξεκινώντας με $h_1(z) = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\frac{h_1(z)}{f(z)}\right)' &= \frac{h_1'(z)f(z) - h_1(z)f'(z)}{[f(z)]^2} = \frac{h_2(z)}{[f(z)]^2}, \\ \left(\frac{h_2(z)}{[f(z)]^2}\right)' &= \frac{h_2'(z)f(z) - 2h_2(z)f'(z)}{[f(z)]^3} = \frac{h_3(z)}{[f(z)]^3}\end{aligned}$$

και, γενικώς,

$$\left(\frac{h_k(z)}{[f(z)]^k}\right)' = \left(\frac{1}{f(z)}\right)^{(k)} = \frac{h_{k+1}(z)}{[f(z)]^{k+1}},$$

όπου

$$h_{k+1}(z) = h_k'(z)f(z) - kh_k(z)f'(z) \quad (4.23)$$

για κάθε $k = 1, 2, \dots, \sigma - 1$. Άρα, η Εξ. (4.22) γίνεται

$$K_\sigma(z) = z + (\sigma - 1) \frac{h_{\sigma-1}(z)f(z)}{h_\sigma(z)}. \quad (4.24)$$

Από την Εξ. (4.23) λανθάνει, παρ' όλο που η κατασκευή των h_k για κάθε $k = 2, 3, \dots, \sigma - 1$ απαιτεί τις πρώτες k παραγώγους της f , ότι οι όροι των K_σ μπορούν να υπολογιστούν κατά επαγωγικό τρόπο, αποφεύγοντας έτσι τη χρονοβόρα διαδικασία του επαναλαμβανόμενου υπολογισμού των k τάξεως παραγώγων για κάθε όρο. Στην [157] υπάρχει μια διαφορετική, αλλά εξίσου ενδιαφέρουσα, ανακατασκευή των συναρτήσεων König.

4.3.3 Πρόσθετα σταθερά σημεία της μεθόδου König

Για $\sigma = 2$, η συνθήκη σταθερού σημείου $K_\sigma(z) = z$ επάγει ότι $f(z) = 0$. Για $\sigma > 2$ επάγει ότι $f(z) = 0$ ή ότι

$$h_{\sigma-1}(z) = 0. \quad (4.25)$$

Θα ονομάζουμε *πρόσθετα σταθερά σημεία* τις ρίζες της (4.25). Στην περίπτωση της μεθόδου Schröder τα σημεία αυτά άλλοτε ήταν ελκυστικά και άλλοτε απωστικά, αλλά καθ' οιονδήποτε τρόπο επηρέαζαν τις λεκάνες έλξης των ριζών της f . Φαίνεται ότι οι συναρτήσεις König ελαχιστοποιούν τέτοιου είδους διαταραχές εξ αιτίας του ακόλουθου ισχυρού αποτελέσματος, το οποίο εισάγουμε εδώ για πρώτη φορά.

Πρόταση 4.3.1 Όλα τα πρόσθετα σταθερά σημεία των K_σ για κάθε $\sigma > 2$ είναι απωστικά.

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας την $K_\sigma(z)$ ως προς z έχουμε

$$\begin{aligned} K'_\sigma(z) &= 1 + (\sigma - 1) \frac{\left(\frac{h_{\sigma-1}(z)}{[f(z)]^{\sigma-1}}\right)' \frac{h_\sigma(z)}{[f(z)]^\sigma} - \frac{h_{\sigma-1}(z)}{[f(z)]^{\sigma-1}} \left(\frac{h_\sigma(z)}{[f(z)]^\sigma}\right)'}{\left(\frac{h_\sigma(z)}{[f(z)]^\sigma}\right)^2} \\ &= 1 + (\sigma - 1) \frac{\frac{h_\sigma(z)}{[f(z)]^\sigma} \frac{h_\sigma(z)}{[f(z)]^\sigma} - \frac{h_{\sigma-1}(z)}{[f(z)]^{\sigma-1}} \frac{h_{\sigma+1}(z)}{[f(z)]^{\sigma+1}}}{\left(\frac{h_\sigma(z)}{[f(z)]^\sigma}\right)^2} \\ &= 1 + (\sigma - 1) \frac{[h_\sigma(z)]^2 - h_{\sigma-1}(z)h_{\sigma+1}(z)}{[h_\sigma(z)]^2}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (4.25) έχουμε ότι για κάθε $\sigma = 3, 4, \dots$ και για όλα τα πρόσθετα σταθερά σημεία ξ_i , $i = 1, 2, \dots, (\sigma - 2)(d - 1)$ ισχύει

$$K'_\sigma(z)|_{z=\xi_i} = \sigma > 1. \quad (4.26)$$

Επομένως, όλα τα πρόσθετα σταθερά σημεία των K_σ είναι απωστικά για κάθε $\sigma \geq 2$. \square

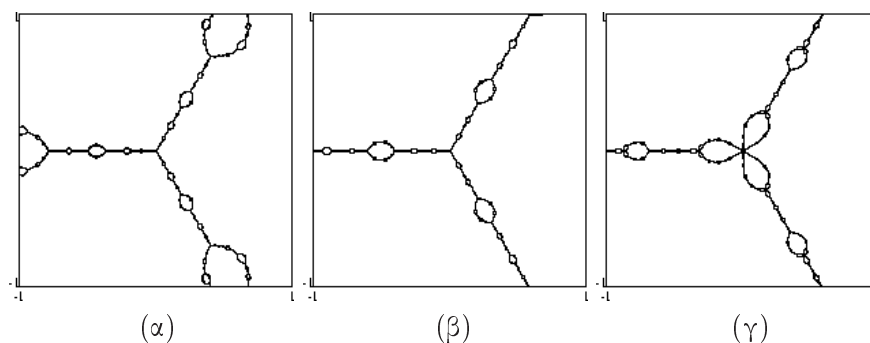
Αυτή είναι μια σημαντική ιδιότητα των συναρτήσεων König, η οποία σημαίνει ότι όλα τα πρόσθετα σταθερά της σημεία, ανεξαρτήτως της συναρτήσεως f , ανήκουν στο σύνολο Julia $J(K_\sigma)$ και έτσι δεν παγιδεύουν κάποια επαναληπτική ακολουθία.

Υποθέτουμε ότι f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $d \geq 2$ και ότι υπάρχουν οι πρώτες $\sigma - 1$ παράγωγοί του. Τότε οι h_k , $k = 1, 2, \dots, \sigma$ είναι πολυώνυμα και οι K_σ είναι ρητές συναρτήσεις. Η συνήθης θεωρία επαναλήψεων των αναλυτικών συναρτήσεων δεν επαρκεί για να περιγράψει τη συνολική δυναμική της μεθόδου König. Σ' αυτό το σημείο έρχεται η θεωρία των Julia και Fatou, ώστε να εξηγήσει τα πιθανά είδη συμπεριφοράς της επαναληπτικής ακολουθίας $(K_\sigma^n)_{n=1}^\infty$.

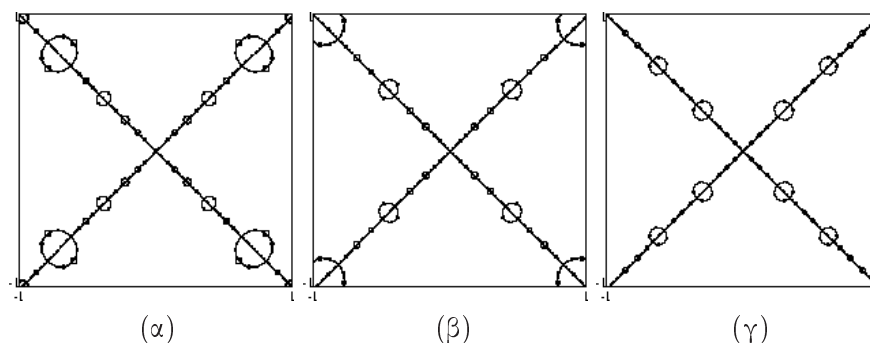
4.3.4 Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί των πολυωνύμων $f_n(z) = z^n - 1$, συναρτήσεων König και οι λεκάνες έλξης των n -οστών ριζών της μονάδας

Σ' αυτό το εδάφιο μελετούμε στο μιγαδικό επίπεδο τις λεκάνες έλξης των ελκυστικών σταθερών σημείων των συναρτήσεων König για $\sigma = 2, 3, 4$ και 5 που κατασκευάστηκαν να συγκλίνουν στις n -οστές ρίζες της μονάδας.

Τα Σχήματα 4.33–4.34 προέκυψαν λαμβάνοντας ένα τετράγωνο ως πλέγμα των αρχικών μας τιμών και χρησιμοποιώντας την Κατασκευή 2 της Ενότητας 7.2. Τα



Σχήμα 4.33: Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί του $f_3(z) = z^3 - 1$, συναρτήσεων König στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος K_3 , (β) μέθοδος K_4 , (γ) μέθοδος K_5 .



Σχήμα 4.34: Σύνολα Julia των, εφαρμοζόμενων επί του $f_4(z) = z^4 - 1$, συναρτήσεων König στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος K_3 , (β) μέθοδος K_4 , (γ) μέθοδος K_5 .

Σχήματα 4.35–4.36 υπολογίσθηκαν λαμβάνοντας ένα τετράγωνο ως πλέγμα των αρχικών μας τιμών και χρησιμοποιώντας την Κατασκευή 3 της Ενότητας 7.2.

Ξεκινάμε τη μελέτη μας αποδεικνύοντας ότι το κλασσικό αποτέλεσμα του Cayley, το οποίο συναντήσαμε στο Εδάφιο 4.2.5, επεκτείνεται στις συναρτήσεις König.

Πρόταση 4.3.2 Για το πολώνυμο $p_c(z) = z^2 - c$, το $J(K_\sigma)$ για κάθε $\sigma = 2, 3, \dots$ είναι μια ευθεία.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό

$$w = \Phi(z) = \frac{z + \sqrt{c}}{z - \sqrt{c}}$$

του οποίου ο αντίστροφος είναι ο

$$\Phi^{-1}(w) = \frac{-w\sqrt{c} - \sqrt{c}}{-w+1} = \sqrt{c} \frac{w+1}{w-1}.$$

Αν η $K_\sigma(z)$ γίνει $M(w)$, τότε

$$\begin{aligned} M(w) &= \Phi \circ K_\sigma \circ \Phi^{-1}(w) = \Phi \circ K_\sigma \left(\sqrt{c} \frac{w+1}{w-1} \right) \\ &= \Phi \left(\sqrt{c} \frac{w^\sigma + 1}{w^\sigma - 1} \right) = \frac{(w^\sigma + 1)/(w^\sigma - 1) + 1}{(w^\sigma + 1)/(w^\sigma - 1) - 1} \\ &= w^\sigma. \end{aligned}$$

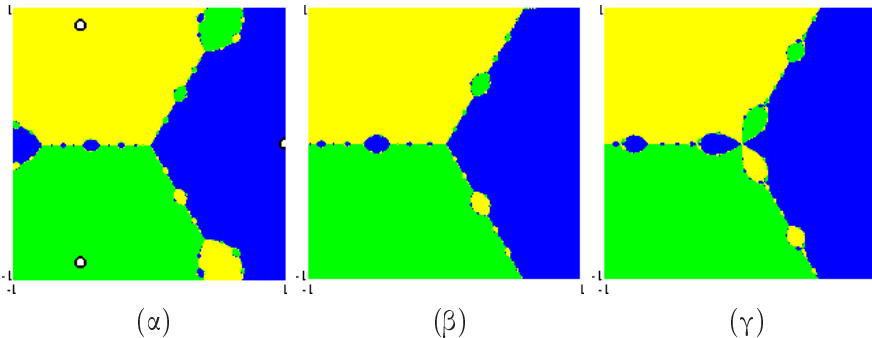
Επομένως, από το Θεώρημα 2.2.1 έπεται το ζητούμενο. \square

Πόρισμα 4.3.1 Για την $f_2(z) = z^2 - 1$, $J(K_\sigma) = \mathfrak{S}$ για κάθε $\sigma = 2, 3, \dots$, όπου \mathfrak{S} είναι ο άξονας των φανταστικών αριθμών.

Συνεπώς, οι λεκάνες έλξης των ριζών της εξίσωσης $f_2(z) = 0$ θα είναι για κάθε $\sigma \geq 2$ ίδιες με αυτές του Σχήματος 4.5(α). Η ακόλουθη ανάλυση των σχημάτων αυτών μελετά ανεξαρτήτως κάθε επαναληπτική διαδικασία K_σ , όπως αυτή εφαρμόζεται στα f_n . Σε όλες τις περιπτώσεις οι n -οστές ρίζες της μονάδας συμβολίζονται ως $z_{i,n}^*$ για κάθε $i = 1, 2, 3, \dots, n$ και $n = 2, 3, \dots$

1η περίπτωση, $\sigma = 2$: Βλ. σ. 65.

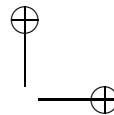
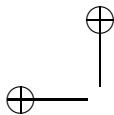
2η περίπτωση, $\sigma = 3$: Η συνθήκη σταθερού σημείου $K_3(z) = z$ επάγει ότι: (i) $f_n(z) = z^n - 1 = 0$ ή (ii) $z = 0$, για κάθε $n = 2, 3, \dots$. Οι λεκάνες έλξης για $n = 3$ και 4 παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.35(α) και 4.36(α), αντιστοίχως.



Σχήμα 4.35: Λεκάνες έλξης των ριζών της $f_3(z) = z^3 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$: (α) μέθοδος K_3 , (β) μέθοδος K_4 , (γ) μέθοδος K_5 .

3η περίπτωση, $\sigma = 4$: Η συνθήκη σταθερού σημείου $K_4(z) = z$ επάγει ότι: (i) $f_n(z) = z^n - 1 = 0$ ή (ii) $z = 0$ ή (iii)

$$z^n + \frac{n-1}{n+1} = 0,$$

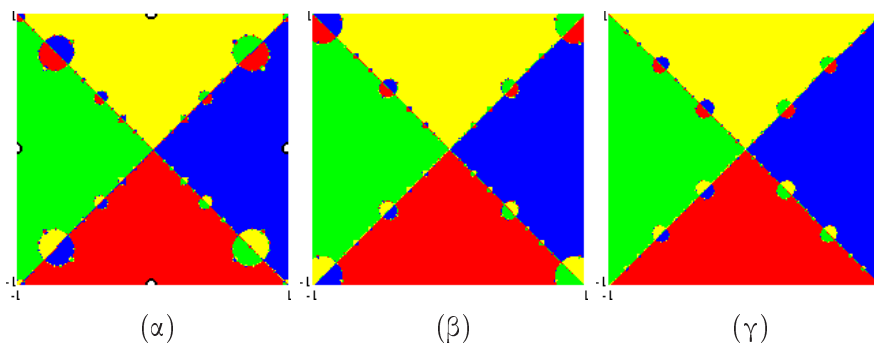


για κάθε $n = 2, 3, \dots$. Οι λεκάνες έλξης για $n = 3$ και 4 παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.35(β) και 4.36(β), αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι, εκτός των ριζών $z_{i,n}^*$ και του $z = 0$, υπάρχουν n πρόσθετα σταθερά σημεία της K_4 , τα οποία συμβολίζουμε ως $\xi_{i,n}$. Όμως, τα πρόσθετα σταθερά αυτά σημεία καιτοι είναι απωστικά λόγω της Εξ. (4.26), δε διαταράσσουν τις λεκάνες έλξης της προηγούμενης περίπτωσης, διότι φαίνεται να ανήκουν στα αντίστοιχα σύνολα Julia.

Η ακόλουθη πρόταση, η οποία βρίσκεται στο [157], ξεκαθαρίζει κάπως το τοπίο.

Πρόταση 4.3.3 Για κάθε $\sigma \geq 3$, όλα τα πρόσθετα σταθερά σημεία των K_σ βρίσκονται στις ακτίνες $\arg(z) = (2j + 1)\pi/n$ για κάθε $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

Άρα, για κάθε $n \geq 2$, τα $\xi_{i,n}$ εκτός του ότι βρίσκονται στα σύνολα $J(K_4)$ βρίσκονται και στα αντίστοιχα σύνολα $J(K_3)$. Συνεπώς, αναμένουμε ότι τα αντίστοιχα σύνολα Julia είναι όμοια αναμεταξύ τους.



Σχήμα 4.36: Λεκάνες έλξης των ριζών της $f_4(z) = z^4 - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) μέθοδος K_3 , (β) μέθοδος K_4 , (γ) μέθοδος K_5 .

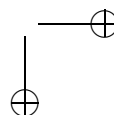
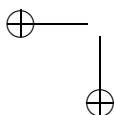
4η περίπτωση, $\sigma = 5$: Η συνθήκη σταθερού σημείου $K_5(z) = z$ επάγει ότι: (i) $f_n(z) = z^n - 1 = 0$ ή (ii) $z = 0$ ή (iii)

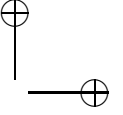
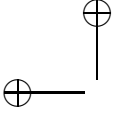
$$(z^n - \rho_n^1)(z^n - \rho_n^2) = 0,$$

όπου

$$\rho_n^{1,2} = \frac{2(n^2 - 1) \pm n\sqrt{3(n^2 - 1)}}{-(n + 1)(n + 2)}$$

για κάθε $n = 2, 3, 4, \dots$. Σ' αυτήν την περίπτωση εμφανίζεται ένα ζεύγος πραγματικών σταθερών σημείων $\mu_{i,n}^1, \mu_{i,n}^2$ για κάθε $z_{i,n}^*$, το οποίο όμως πάλι δεν επηρεάζει τις λεκάνες έλξης καιτοι τα $\mu_{i,n}^1, \mu_{i,n}^2$ είναι απωστικά λόγω της Εξ. (4.26). Το χαρακτηριστικό αυτό εικονογραφείται στα Σχήματα 4.35(γ) και 4.36(γ) για $n = 3$ και 4, αντιστοίχως. Επομένως, τα σημεία αυτά για κάθε $n \geq 2$ βρίσκονται στα σύνολα $J(K_5)$, όπως επίσης και στα αντίστοιχα σύνολα Julia της προηγούμενης τάξης.





4.3.5 Η μέθοδος König στον παραμετρικό χώρο

Εστιάζουμε τώρα την προσοχή μας στην επαναληπτική μέθοδο König που σχετίζεται με την μονοπαραμετρική οικογένεια των κυβικών πολυωνύμων (3.2). Η ανάλυση της μεθόδου König για το γενικό πολυώνυμο τρίτου βαθμού μας ανάγει στην ανάλυση των p_λ .

Θα εργαστούμε, λοιπόν, στον παραμετρικό χώρο των λ , όπου $\lambda \in \mathbb{C}$. Η δυναμική κάθε απεικόνισης König, K_σ , μελετήθηκε στον παραμετρικό χώρο κατά τον ίδιο τρόπο, όπως και στο Εδάφιο 4.3.4 (πρβ. Κατασκευή 1 στην Ενότητα 7.3). Για κάθε σημείο $\lambda = \text{Re}(\lambda) + i \text{Im}(\lambda)$ η p_λ αναπαριστά ένα δυναμικό σύστημα με δικά του σταθερά σημεία, πιθανούς ελκυστικούς κύκλους και σύνολα Julia. Υπάρχουν περιοχές του παραμετρικού χώρου των λ , όπου ελκυστικοί περιοδικοί κύκλοι συνυπάρχουν με τα (ελκυστικά) σταθερά σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες της $p_\lambda = 0$. Για να ανακαλύψουμε την ύπαρξη ελκυστικών κύκλων, οι οποίοι συγκρούονται με την αναζήτηση κατά König για τις z_i^* , παρατηρούμε τις τροχιές των κρίσιμων σημείων των συναρτήσεων K_σ .

Από τη σχέση $K'_\sigma(z) = 0$ προκύπτει η εξίσωση

$$\sigma[h_\sigma(z)]^2 - (\sigma - 1)h_{\sigma-1}(z)h_{\sigma+1}(z) = 0$$

από την οποία υπολογίζονται τα κρίσιμα σημεία της K_σ και με τη βοήθεια αυτών προσδιορίζονται τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία τα οποία διαφοροποιούνται από τις ρίζες της f . Ο βαθμός των h_{k+1} , $k = 1, 2, \dots, \sigma-1$ ικανοποιεί την $\deg(h_{k+1}) = \deg(h_k) + d - 1$. Αφού $\deg(h_1) = 0$, ισχύει ότι $\deg(h_k) = (k-1)(d-1)$, οπότε έχουμε το πολύ $2(\sigma-1)(d-1)$ διαφορετικά κρίσιμα σημεία της K_σ .

Εύρεση των, σχετιζόμενων με τα p_λ , ελεύθερων κρίσιμων σημείων των K_σ για $\sigma = 3, 4, 5$

Στην περίπτωση $\sigma = 3$ τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση

$$6z^2 - (\lambda - 1) = 0. \quad (4.27)$$

Έτσι τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία τα οποία ικανοποιούν την Εξ. (4.27) είναι

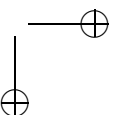
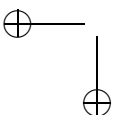
$$c_{1,2} = \pm \sqrt{(\lambda - 1)/6}.$$

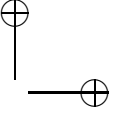
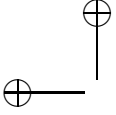
Στην περίπτωση $\sigma = 4$ τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση

$$10z^3 - 5(\lambda - 1)z - \lambda = 0. \quad (4.28)$$

Διαιρώντας με το συντελεστή του z^3 ανάγουμε την Εξ. (4.28) στη μορφή

$$z^3 - 1/2(\lambda - 1)z - 1/10\lambda = 0,$$





η οποία είναι της μορφής (Α'.2), όπου $p = -1/2(\lambda - 1)$ και $q = -1/10\lambda$. Έτσι, τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία που ικανοποιούν την Εξ. (4.28) είναι τα

$$c_1 = \sqrt[3]{R + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{R + \sqrt{\Delta}} - \frac{Q}{\sqrt[3]{R + \sqrt{\Delta}}},$$
$$c_{2,3} = -c_1/2 \pm \sqrt{(c_1/2)^2 - 2R/c_1},$$

όπου $R = \lambda/20$, $Q = -(\lambda - 1)/6$ και $\Delta = R^2 + Q^3$.

Στην περίπτωση $\sigma = 5$ τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση

$$15z^4 - 15(\lambda - 1)z^2 - 6\lambda z + (\lambda - 1)^2 = 0. \quad (4.29)$$

Διαιρώντας με το συντελεστή του z^4 ανάγουμε την Εξ. (4.29) στη μορφή

$$z^4 - (\lambda - 1)z^2 - 2/5\lambda z + 1/15(\lambda - 1)^2 = 0, \quad (4.30)$$

η οποία είναι της μορφής (Α'.6), όπου $p = -(\lambda - 1)$, $q = -2/5\lambda$ και $r = 1/15(\lambda - 1)^2$. Τελικώς, από την Εξ. (Α'.7), έχουμε ότι τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία που ικανοποιούν την Εξ. (4.29) είναι τα

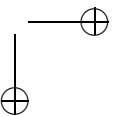
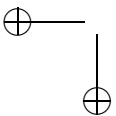
$$c_{1,2} = \left[a \pm \sqrt{4/3(\lambda - 1) - y + 4\lambda/(5a)} \right] / 2,$$
$$c_{3,4} = \left[-a \pm \sqrt{4/3(\lambda - 1) - y - 4\lambda/(5a)} \right] / 2,$$

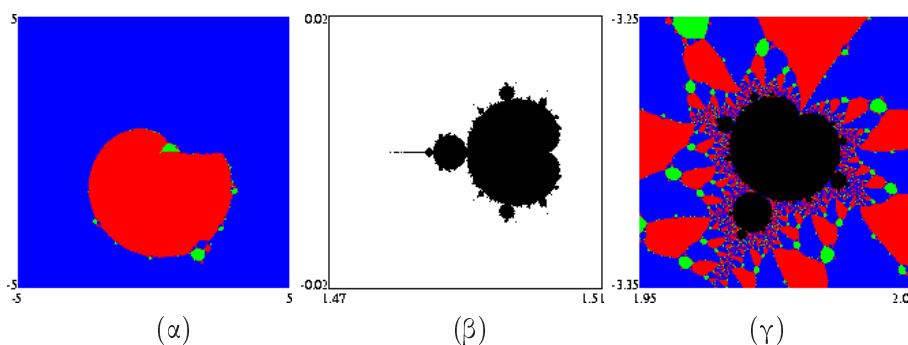
όπου $a = \sqrt{2(\lambda - 1)/3 + y}$.

Περίπατος στον παραμετρικό χώρο

Αφού κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει ακριβώς δύο τετραγωνικές ρίζες, ορίζουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα, $+\sqrt{z}$, του z , να είναι αυτή με θετικό φανταστικό μέρος ή, αν ο z είναι γνήσιος πραγματικός, αυτή με θετικό πραγματικό μέρος. Για τον υπολογισμό των c_i χρησιμοποιούμε τις τρίτες ρίζες των μιγαδικών αριθμών που έχουν το μικρότερο όρισμα.

Σε όλες τις περιπτώσεις, οι προκύπτουσες μαύρες περιοχές αναπαριστούν χωρία του παραμετρικού χώρου, εντός των οποίων τα κρίσιμα σημεία δε συγκλίνουν προς κάποια ρίζα z_i^* . Αφού όλα τα πρόσθετα σταθερά σημεία είναι απωστικά, οι τροχιές των κρίσιμων αυτών σημείων είναι πρόσθετοι ελκυστικοί κύκλοι μήκους $k \geq 2$. Εμείς εξετάζουμε τη δυναμική εκείνων των κρίσιμων σημείων, τα οποία αντιστοιχούν στις θετικές τετραγωνικές ρίζες. Οι αντίστοιχες εικόνες του παραμετρικού χώρου για τα κρίσιμα σημεία $c_{i+1} = -c_i$ επιτυγχάνονται μέσω ανάκλασης γύρω απ' τον πραγματικό άξονα των λ .





Σχήμα 4.37: (α) Επαναληπτική εφαρμογή της K_3 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ . (β), (γ) Τα παραμετρικά χωρία $[1.47, 1.51] \times [-0.02, 0.02]$ και $[1.95, 2.05] \times [-3.35, -3.25]$, αντιστοίχως, του Σχήματος (α) αποκαλύπτουν σύνολα τύπου Mandelbrot για την K_3 .

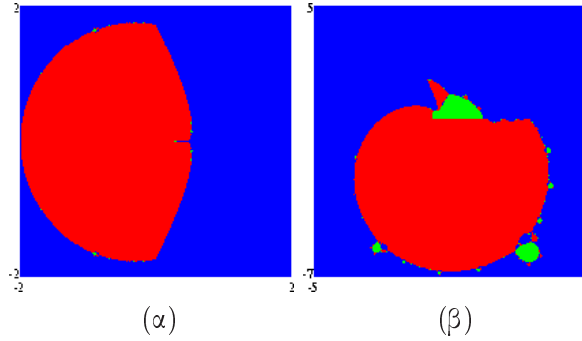
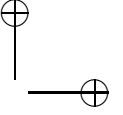
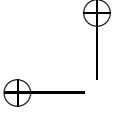
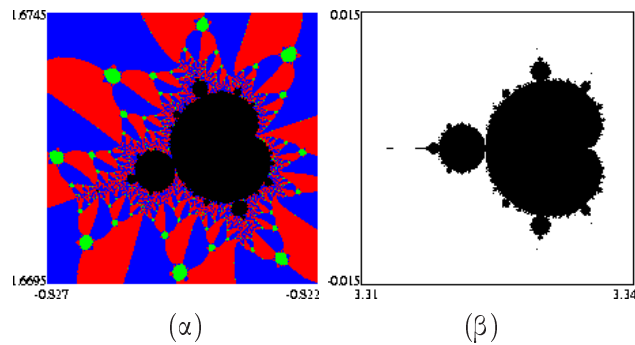
1η περίπτωση, $\sigma = 2$: Βλ. σ. 71.

2η περίπτωση, $\sigma = 3$: Το Σχήμα 4.37(α) αναπαριστά περιοχές του $[-5, 5] \times [-5, 5]$ στον παραμετρικό χώρο των λ για τις οποίες το κρίσιμο σημείο c_1 έλκεται προς τις z_i^* . Τα Σχήματα 4.37(β) και (γ) αποτελούν μεγεθύνσεις των περιοχών $[1.47, 1.51] \times [-0.02, 0.02]$ και $[1.95, 2.05] \times [-3.35, -3.25]$, αντιστοίχως εμφανίζοντας σύνολα τύπου Mandelbrot που σχετίζονται με το c_1 . Το Σχήμα 4.37(β) είναι ανακλασμένο γύρω απ' τον πραγματικό άξονα. Το κάτω μισό (συμπεριλαμβανομένου του πραγματικού άξονα) αυτού του, τύπου Mandelbrot, συνόλου, αντιστοιχεί στις τιμές των λ , για τις οποίες το c_1 δε συγκλίνει προς τις z_i^* : το πάνω μισό αντιστοιχεί στο κρίσιμο σημείο c_2 . Το κύριο καρδιοειδές που εμφανίζεται στο Σχήμα 4.37(γ) αναπαριστά παραμετρικές τιμές ελκυστικών κύκλων μήκους 2. Τα πρόσθετα (απωστικά) σταθερά σημεία ικανοποιούν την εξίσωση

$$3z^2 + (\lambda - 1) = 0.$$

3η περίπτωση, $\sigma = 4$: Το Σχήμα 4.38(α) αναπαριστά περιοχές του $[-2, 2] \times [-2, 2]$ στον παραμετρικό χώρο των λ για τις οποίες το κρίσιμο σημείο c_1 έλκεται προς τις z_i^* . Το Σχήμα 4.39(α) αποτελεί μεγέθυνση της περιοχής $[-0.827, -0.822] \times [1.6695, 1.6745]$. Το Σχήμα 4.38(β) αναπαριστά περιοχές του $[-5, 7] \times [-7, 5]$ στον παραμετρικό χώρο των λ για τις οποίες το κρίσιμο σημείο c_2 έλκεται προς τις z_i^* . Το Σχήμα 4.39(β) αποτελεί μεγέθυνση της περιοχής $[3.31, 3.34] \times [-0.015, 0.015]$, αλλά είναι ανακλασμένο γύρω απ' τον πραγματικό άξονα. Τα μαύρα χωρία αναπαριστούν και εδώ σύνολα παραμετρικών τιμών για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία δε συγκλίνουν προς μία ρίζα του p_λ . Τα πρόσθετα (απωστικά) σταθερά σημεία ικανοποιούν την

$$6z^4 + 3(\lambda - 1)z^2 + 3\lambda z + (\lambda - 1)^2 = 0.$$

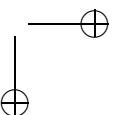
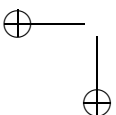
Σχήμα 4.38: Επαναληπτική εφαρμογή της K_4 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ .Σχήμα 4.39: Μεγεθύνσεις των προηγούμενων Σχημάτων (α) και (β), αντιστοίχως, αποκαλύπτουν σύνολα Mandelbrot για την K_4 .

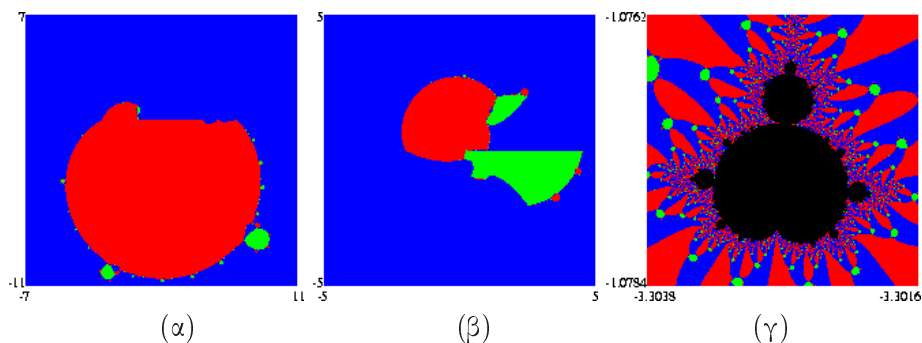
4η περίπτωση, $\sigma = 5$: Το Σχήμα 4.40(α) αναπαριστά περιοχές του $[-7, 11] \times [-11, 7]$ στον παραμετρικό χώρο των λ για τις οποίες το κρίσιμο σημείο c_1 έλκεται προς τις z_i^* . Το Σχήμα 4.40(β) αναπαριστά την περιοχή $[-5, 5] \times [-5, 5]$ για την οποία το κρίσιμο σημείο c_2 έλκεται προς τις z_i^* . Το Σχήμα 4.40(γ) αποτελεί μεγέθυνση της περιοχής $[-3.3038, -3.3016] \times [-1.0784, -1.0762]$ του Σχήματος 4.40(α). Τα πρόσθετα (απωστικά) σταθερά σημεία ικανοποιούν την Εξ. (4.7), δηλ., την εξίσωση

$$10z^6 + 5(\lambda - 1)z^4 + 16\lambda z^3 + 4(\lambda - 1)^2 z^2 + 4\lambda(\lambda - 1)z + (\lambda - 1)^3 + \lambda^2 = 0.$$

4.3.6 Λεκάνες έλξης σχετιζόμενες με παθολογικούς ελκυστικούς κύκλους

Όπως και στο Εδάφιο 4.2.7, οι μαύρες περιοχές που ανακαλύψαμε στον παραμετρικό χώρο εκφράζουν τη μορφολογία και τα κλασικά χαρακτηριστικά των συνόλων





Σχήμα 4.40: (α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της K_5 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ . (γ) Το μιγαδικό παραμετρικό χωρίο $[-3.3038, -3.3016] \times [-1.0784, -1.0762]$ του Σχήματος (α) αποκαλύπτει ένα σύνολο Mandelbrot για την K_5 .

Mandelbrot. Επομένως δεν πρέπει να μας εκπλήσσει ο ακόλουθος

Ορισμός 4.3.1 Το, σχετιζόμενο με την επαναληπτική μέθοδο K_σ , σύνολο Mandelbrot ως προς τα κυβικά πολυώνυμα p_λ είναι το σύνολο

$$\mathcal{M}_\sigma(\lambda) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \text{υπάρχουν ελκυστικοί κύκλοι μήκους } k \text{ για κάθε } k = 2, 3, \dots \text{ της } K_\sigma \text{ διαφορετικοί των ριζών } z_i^* \text{ της } p_\lambda(z) = 0 \}.$$

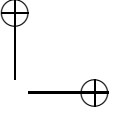
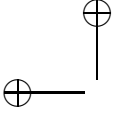
Στο εδάφιο αυτό μελετούμε τη συμπεριφορά των ελκυστικών περιοδικών σημείων των απεικονίσεων König τάξης υψηλότερης από δύο, τα οποία οδηγούν σε παθολογικούς κύκλους, δηλαδή σε σημεία ή κύκλους που δεν αντιστοιχούν στις επιθυμητές ρίζες.

Συγκεκριμένα, εξετάζουμε τις επιδράσεις των περιοχών τύπου Mandelbrot, $\mathcal{M}_\sigma(\lambda)$, του παραμετρικού χώρου των λ ανακαλυφθέντες στο Εδάφιο 4.3.5, πάνω στις απεικονίσεις των ελκυστικών λεκανών έλξης και των συνόλων στο χώρο των μιγαδικών συντεταγμένων. Για κάθε $\lambda \in \mathcal{M}_\sigma(\lambda)$, η ακολουθία των επαναλήψεων $(K_\sigma^n)_{n=1}^\infty$ παράγει ελκυστικούς κύκλους μήκους $k \geq 2$ διαφορετικούς από τις ρίζες της $p_\lambda(z) = 0$.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται εικόνες λεκανών έλξης, οι οποίες αντιστοιχούν στις «κρίσιμες» τιμές $\lambda \in \mathcal{M}_\sigma(\lambda)$, καθώς και στις γειτονικές, μη «κρίσιμες», τιμές για τις συναρτήσεις K_2, K_3, K_4 και K_5 , όπως αυτές εφαρμόζονται στα κυβικά πολυώνυμα p_λ . Οι απεικονίσεις αυτές σχεδιάστηκαν χρησιμοποιώντας την Κατασκευή 3 που παρουσιάζεται στην Ενότητα 7.2.

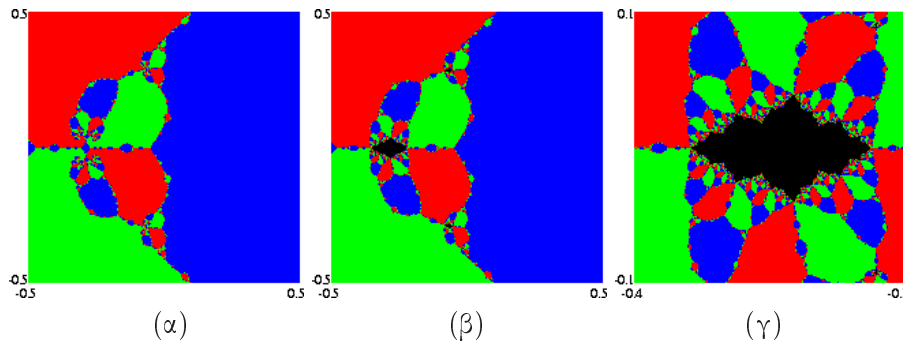
Μέθοδος König δεύτερης τάξης

Βλ. Εδάφιο 4.2.7 για $\sigma = 2$.



Μέθοδος König τρίτης τάξης

Τα Σχήματα 4.41(α) και 4.41(β) αναπαριστούν λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για τη μιγαδική περιοχή $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$, οι οποίες αντιστοιχούν στις τιμές $\lambda = 1.51$ (μη «κρίσιμη») και $\lambda = 1.492$ (ένα πρόσθετο περιοδικό σημείο), αντιστοίχως. Παρατηρώντας το Σχήμα 4.37(β) βλέπουμε ότι για $\lambda = 1.51$ δεν υπάρχουν άλλοι ελκυστικοί κύκλοι μήκους $k \geq 1$ εκτός των ριζών z_i^* . Για $\lambda = 1.492$, μια αξιοσημείωτη αλλαγή εμφανίζεται σ' αυτήν την εικόνα. Προφανώς, το πέρασμα από το Σχήμα 4.41(α) προς το Σχήμα 4.41(β) αντιστοιχεί στο πέρασμα της παραμέτρου από το εξωτερικό του συνόλου τύπου Mandelbrot του Σχήματος 4.37(β) στο εσωτερικό του συνόλου. Το Σχήμα 4.41(γ) αποτελεί μεγέθυνση του χωρίου $[-0.4, -0.2] \times [-0.1, 0.1]$ του Σχήματος 4.41(β).



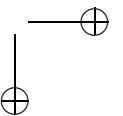
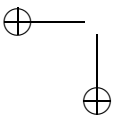
Σχήμα 4.41: (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για την K_3 , όπου $\lambda = 1.51$ και $\lambda = 1.492$, αντιστοίχως. (γ) Το χωρίο $[-0.4, -0.2] \times [-0.1, 0.1]$ του Σχήματος (β) περιέχει μία από τις λεκάνες έλξης του ανεπιθύμητου κύκλου.

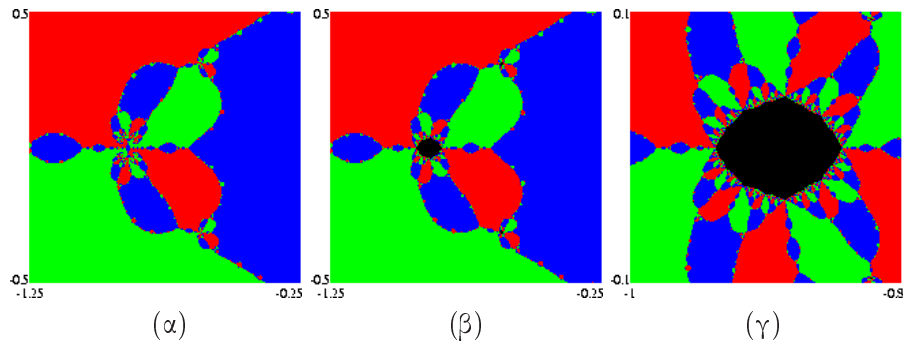
Μέθοδος König τέταρτης τάξης

Τα Σχήματα 4.42(α) και 4.42(β) αναπαριστούν λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για το μιγαδικό χωρίο $[-1.25, -0.25] \times [-0.5, 0.5]$, οι οποίες αντιστοιχούν στο $\lambda = 3.34$ (μη «κρίσιμο») και $\lambda = 3.33$ (ένα πρόσθετο περιοδικό σημείο), αντιστοίχως. Το πέρασμα από το Σχήμα 4.42(α) προς το Σχήμα 4.42(β) αντιστοιχεί στο πέρασμα της παραμέτρου από το εξωτερικό του συνόλου τύπου Mandelbrot του Σχήματος 4.39(β) στο εσωτερικό του συνόλου. Το Σχήμα 4.42(γ) αποτελεί μεγέθυνση του χωρίου $[-1, -0.8] \times [-0.1, 0.1]$ του Σχήματος 4.42(β).

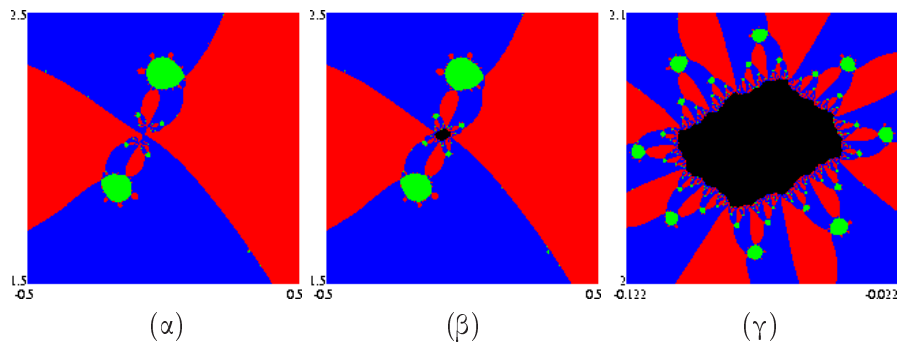
Μέθοδος König πέμπτης τάξης

Τα Σχήματα 4.43(α) και 4.43(β) αναπαριστούν λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για το μιγαδικό χωρίο $[-0.5, 0.5] \times [1.5, 2.5]$, οι οποίες αντιστοιχούν στην $\lambda = -3.303 -$





Σχήμα 4.42: (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για την K_4 , όπου $\lambda = 3.34$ και $\lambda = 3.33$ αντιστοίχως. (γ) Το χωρίο $[-1, -0.8] \times [-0.1, 0.1]$ του Σχήματος (β) περιέχει μία από τις λεκάνες έλξης του ανεπιθύμητου κύκλου.

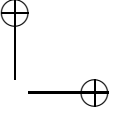
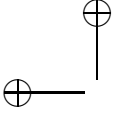


Σχήμα 4.43: (α), (β) Λεκάνες έλξης των ριζών του p_λ για την K_5 , όπου $\lambda = -3.303 - 1.079i$ και $\lambda = -3.303 - 1.0776i$, αντιστοίχως. (γ) Το χωρίο $[-0.122, -0.022] \times [2, 2.1]$ του Σχήματος (β) περιέχει μία από τις λεκάνες έλξης του ανεπιθύμητου κύκλου.

$1.079i$ (μη «κρίσιμο») και $\lambda = -3.303 - 1.0776i$ (ένα πρόσθετο περιοδικό σημείο), αντιστοίχως. Το πέρασμα από το Σχήμα 4.43(α) προς το Σχήμα 4.43(β) αντιστοιχεί στο πέρασμα της παραμέτρου από το εξωτερικό του συνόλου τύπου Mandelbrot του Σχήματος 4.40(γ) στο εσωτερικό του συνόλου. Το Σχήμα 4.43(γ) αποτελεί μεγέθυνση του χωρίου $[-0.122, -0.022] \times [2, 2.1]$ του Σχήματος 4.43(β).

4.4 Επαναληπτική μέθοδος Laguerre

Η μέθοδος Laguerre είναι η πιο άμεση επαναληπτική μέθοδος για την εύρεση των ριζών πολυωνύμων των οποίων οι ρίζες είναι πραγματικές και απλές.



4.4.1 Κατασκευή της συνάρτησης Laguerre

Η μέθοδος του Laguerre σχεδιάστηκε για πολυώνυμα με πραγματικές ρίζες και, όταν αυτές είναι διακεκριμένες, δίνει ισχυρή σύγκλιση αμέσως από οιαδήποτε αρχική τιμή. Η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί στο μιγαδικό επίπεδο ως ακολούθως, αλλά κοιτάζετε επίσης και την [124].

Έστω f αναλυτική σε κάποιον τόπο T , έστω ότι το $w \in T$ είναι μια ρίζα της f και έστω $f'(w) \neq 0$. Έστω ν ένας πραγματικός αριθμός, όπου $\nu \neq 0, 1$. Τότε, υπάρχει μια περιοχή D του w τέτοια, ώστε

$$\left| \frac{\nu}{\nu-1} \frac{f(z)f''(z)}{[f'(z)]^2} \right| < 1, \quad z \in D.$$

Συνεπώς η τετραγωνική ρίζα

$$r(z) = \left\{ 1 - \frac{\nu}{\nu-1} \frac{f(z)f''(z)}{[f'(z)]^2} \right\}^{1/2}$$

είναι αναλυτική στην D και δύναται να οριστεί από την κύρια τιμή της. Για κάθε $z \in D$ ορίζουμε

$$L(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \frac{\nu}{1 + (\nu-1)r(z)} \quad (4.31)$$

και ισχυριζόμαστε το ακόλουθο

Θεώρημα 4.4.1 Για κάθε $\nu \neq 0, 1$, η συνάρτηση L που ορίζεται από την Εξ. (4.31), είναι μια επαναληπτική συνάρτηση τρίτης τάξης για την επίλυση της $f(z) = 0$.

Απόδειξη. Βλ. [87]. \square

Ορίζουμε την επαναληπτική μέθοδο Laguerre $L(z)$ ως (βλ. [87])

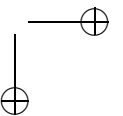
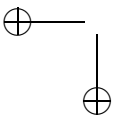
$$L(z) = z - \frac{\nu f(z)}{f'(z) + \{(\nu-1)^2[f'(z)]^2 - \nu(\nu-1)f(z)f''(z)\}^{1/2}}, \quad (4.32)$$

όπου το όρισμα της ρίζας πρόκειται να επιλεγθεί, ώστε να διαφέρει λιγότερο από $\pi/2$ από το όρισμα της $(\nu-1)f'(z)$. Η Εξ. (4.32) μπορεί να γραφεί ισοδυνάμως ως

$$L(z) = z - \frac{\nu[f(z)/f'(z)]}{1 + \{(\nu-1)^2 - \nu(\nu-1)[f(z)f''(z)/(f'(z))^2]\}^{1/2}}. \quad (4.33)$$

Παρατηρούμε ότι $L(z) = \infty$ τότε και μόνο, αν $f'(z) = f''(z) = 0$. Η επανάληψη (4.33) για $\nu = 2$ γίνεται

$$L_2(z) = z - \frac{2[f(z)/f'(z)]}{1 + \{1 - 2[f(z)f''(z)/(f'(z))^2]\}^{1/2}}. \quad (4.34)$$



Από αυτόν τον τύπο μπορούμε να εξάγουμε πιο απλούς, εάν εισάγουμε προσεγγίσεις. Για παράδειγμα, αν (για μικρό f) εισάγουμε την προσέγγιση

$$\sqrt{1 - 2 \frac{f(z)f''(z)}{[f'(z)]^2}} \approx 1 - \frac{f(z)f''(z)}{[f'(z)]^2}$$

στην Εξ. (4.34), παίρνουμε τον τύπο

$$H(z) = z - \frac{f(z)/f'(z)}{1 - f(z)f''(z)/\{2[f'(z)]^2\}} \quad (4.35)$$

ο οποίος είναι επίσης τρίτης τάξης, αλλά δεν απαιτεί την εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας. Αυτός είναι ο συχνά ανακαλυφθείς τύπος του *Halley*. Επαναληπτική προσέγγιση βασισμένη σ' αυτόν τον τύπο καλείται επίσης μέθοδος *Bailey* ή μέθοδος *Lambert*. Αυτός ο τύπος ανήκει σε μια γενικότερη κλάση επαναληπτικών συναρτήσεων, η οποία, όπως μάθαμε, είναι οι συναρτήσεις *König* και αυτή είναι συγκεκριμένα η K_3 .

Αν γράψουμε

$$\left[1 - \frac{f(z)f''(z)}{2[f'(z)]^2}\right]^{-1} \approx 1 + \frac{f(z)f''(z)}{2[f'(z)]^2}$$

στον τύπο του *Halley*, παίρνουμε την επανάληψη

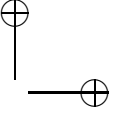
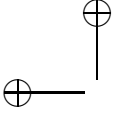
$$C(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \left[1 + \frac{f(z)f''(z)}{2[f'(z)]^2}\right].$$

Αυτή είναι μια τρίτης τάξη επανάληψη, η οποία ενίοτε καλείται τύπος του *Chebyshev*. Για περισσότερες λεπτομέρειες επί του αντικειμένου βλ. [88]. Αυτός ο τύπος ανήκει επίσης σε μια γενικότερη κλάση επαναληπτικών συναρτήσεων, η οποία, όπως μάθαμε, είναι οι συναρτήσεις *Schröder* και αυτή είναι συγκεκριμένα η S_3 .

Η επαναληπτική ακολουθία $z_{k+1} = L(z_k)$ συγκλίνει «τοπικώς» προς τις ρίζες z_i^* , $i = 1, 2, \dots, n = \deg(f)$ της $f(z) = 0$, καθώς $O(|z_k - z_i^*|^2)$ εξ' αιτίας της

$$r(z) = 1 - \frac{\nu}{2(\nu - 1)} \frac{f(z)f''(z)}{[f'(z)]^2} + O((z - w)^2).$$

Η επαναληπτική συνάρτηση *Laguerre* δεν προσφέρει φαινομενικώς κάποιο πλεονέκτημα έναντι της τρίτης τάξεως *Schröder*, η οποία υπολογίζεται και πιο εύκολα. Από πρακτική άποψη, παρά ταύτα, η παρουσία της τετραγωνικής ρίζας φαίνεται να έχει το επιθυμητό αποτέλεσμα, δηλ. αν η f είναι ένα πραγματικό πολυώνυμο, η επανάληψη αυτομάτως επεκτείνεται στο μιγαδικό επίπεδο, αν δε βρεθούν πραγματικές ρίζες. Άλλωστε, αν η f είναι ένα πραγματικό πολυώνυμο βαθμού $n \geq 2$, η επιλογή $\nu = n$ προσφέρει αξιοσημείωτα θεωρήματα του περιέχονται για τις πραγματικές ρίζες, όπως το



Θεώρημα 4.4.2 Έστωσαν f ένα πολυώνυμο βαθμού n και L η επαναληπτική συνάρτηση Laguerre που σχηματίζεται με $\nu = n$. Τότε, για κάθε μιγαδικό αριθμό z , υπάρχει μια ρίζα w της f τέτοια, ώστε $|w - z| \leq \sqrt{n} |L(z) - z|$.

Απόδειξη. Βλ. [98]. \square

4.4.2 Ανακατασκευή της συνάρτησης Laguerre

Κανένα από τα αποτελέσματα των Εξ. (4.32) ή Εξ. (4.33) δεν είναι εύκολο να αιτιολογηθεί. Επομένως ορίζουμε κατά σειρά $F(z) = f'(z)/f(z)$, $G(z) = [F(z)]^2 - f''(z)/f(z)$ και

$$\lambda(z) = \frac{F(z) + \delta(z)\sqrt{\nu-1}}{\nu},$$

όπου $\delta(z) = \pm\sqrt{\nu G(z) - [F(z)]^2}$ και με το πρόσημο επιλεγμένο να μεγιστοποιεί την $|\lambda|$. Έτσι, η Εξ. (4.32) γίνεται (βλ. επίσης [98])

$$L(z) = z - \frac{1}{\lambda(z)},$$

όπου το πρόσημο πρέπει να ληφθεί, ώστε να αποφέρει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή του παρονομαστή. Η σύγκλιση είναι κυβική προς μία απλή ρίζα και γραμμική προς μία πολλαπλή.

Υποθέτουμε ότι η f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n \geq 2$. Περιγράφουμε τα δυνατά είδη συμπεριφοράς της επαναληπτικής ακολουθίας $L^k(z)$.

Ακολουθώντας το συμβολισμό αυτού του εδαφίου, η συνθήκη $L'(z) = 0$ επάγει ότι

$$[\lambda(z)]^2 + \lambda'(z) = 0,$$

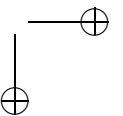
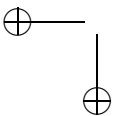
η οποία δίνει

$$\begin{aligned} & 3(\nu-1)(\nu-2)^2 [f'(z)]^2 [f''(z)]^2 - 4(\nu-1)^2 (\nu-2) [f'(z)]^3 f'''(z) \\ & - 4\nu(\nu-2)^2 f(z) [f''(z)]^3 + 6\nu(\nu-1)(\nu-2) f(z) f'(z) f''(z) f'''(z) \\ & - \nu^2 (\nu-1) [f(z)]^2 [f'''(z)]^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί έναν μεγάλο περιορισμό για τη μελέτη της συνάρτησης Laguerre τόσο σε παραμετρικούς όσο και σε δυναμικούς χώρους.

Πρόταση 4.4.1 Η συνάρτηση Laguerre παραμένει αναλλοίωτη υπό οιονδήποτε μετασχηματισμό Möbius.

Απόδειξη. Βλ. [124]. \square



4.4.3 Η μέθοδος Laguerre σε παραμετρικούς χώρους

Τώρα εστιάζουμε στην επαναληπτική μέθοδο Laguerre, η οποία σχετίζεται με τη δευτεροβάθμια οικογένεια (3.1) και με την μονοπαραμετρική οικογένεια κυβικών πολυωνύμων (3.2). Υπάρχουν περιοχές του παραμετρικού χώρου, όπου ελκυστικοί περιοδικοί κύκλοι συνυπάρχουν με τα ελκυστικά σταθερά σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες των p_c ή p_λ . Για να ανακαλύψουμε την ύπαρξη ελκυστικών κύκλων, οι οποίοι συγκρούονται με την αναζήτηση κατά Laguerre των z_i^* , εξετάζουμε την ύπαρξη ελεύθερων κρίσιμων σημείων των συναρτήσεων L .

Από την Εξ. (4.36) και θέτοντας $\nu = \deg(p_c) = 2$, τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης L που σχετίζονται με το p_c μπορούν να παραχθούν από την

$$[p_c(z)]^2 [p_c'''(z)]^2 = 0,$$

η οποία ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Τα ελεύθερα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης L που σχετίζεται με την p_λ , λόγω της Εξ. (4.36), μπορούν να εξαχθούν από την

$$\begin{aligned} 6(n-3)^2(n-4)z^6 - 6(n-3)^2(n+2)(\lambda-1)z^4 + 12n(n-3)(2n-5)\lambda z^3 \\ + 6n(n-1)(n-3)(\lambda-1)^2 z^2 - 12n(n-1)(n-3)\lambda(\lambda-1)z \\ - 2(n-1)^2(n-2)(\lambda-1)^3 - 3n^2(n-1)\lambda^2 = 0. \end{aligned}$$

Θέτοντας $n = \deg(p_\lambda) = 3$ στην παραπάνω εξίσωση συμπεραίνουμε ότι και σ' αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχουν ελεύθερα κρίσιμα σημεία.

Συνεπώς, η μέθοδος Laguerre έχει απόλυτη σύγκλιση στο μιγαδικό επίπεδο για όλα τα μιγαδικά τετραγωνικά και κυβικά πολυώνυμα.

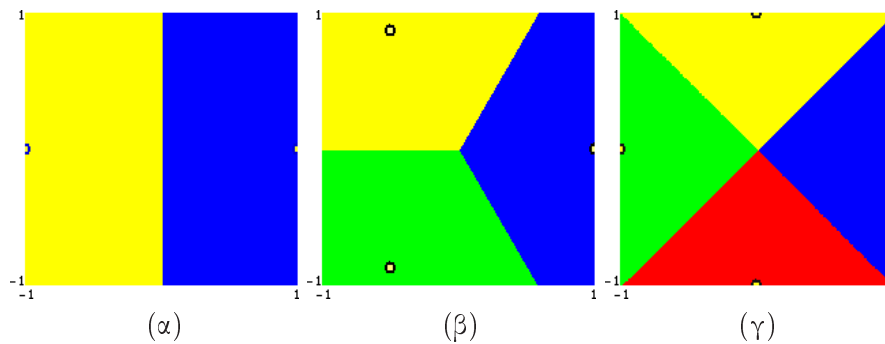
4.4.4 Σύνολα Julia της, εφαρμοζόμενης στα πολυώνυμα $f_n(z) = z^n - 1$, συνάρτησης Laguerre και οι λεκάνες έλξης των n -οστών ριζών της μονάδας

Με τη βοήθεια σχεδίων από τον υπολογιστή εξετάζουμε τα σύνολα Julia της μεθόδου Laguerre εφαρμοζόμενη στην οικογένεια των συναρτήσεων $f_n(z) = z^n - 1$ για κάθε $n = 2, 3, \dots$, καθώς και τις λεκάνες έλξης των ριζών της οικογένειας αυτής.

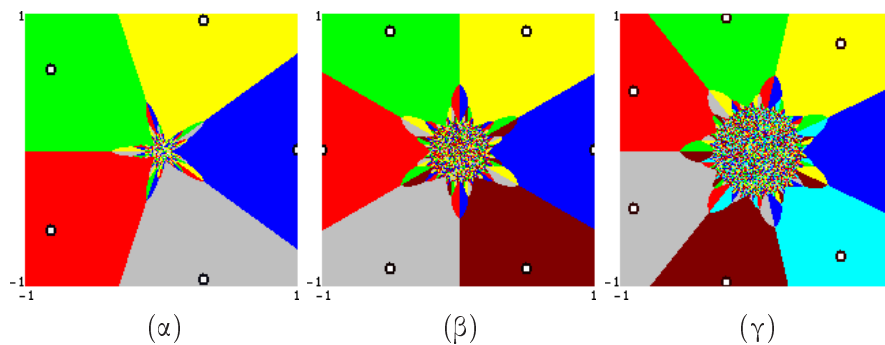
Τα Σχήματα 4.44–4.45 υπολογίσθηκαν λαμβάνοντας ένα τετράγωνο ως πλέγμα των αρχικών μας τιμών και χρησιμοποιώντας την Κατασκευή 3 της Ενότητας 7.2. Τα Σχήματα 4.46–4.47 προέκυψαν χρησιμοποιώντας την Κατασκευή 2 της Ενότητας 7.2. Αντικαθιστώντας την f_n στον μετασχηματισμό Laguerre (4.33) θέτοντας $\nu = \deg(f_n) = n$ παίρνουμε

$$L(z) = z \frac{z^{-n/2} + (n-1)}{z^{n/2} + (n-1)}.$$

Η συνθήκη σταθερού σημείου $L(z) = z$ επάγει ότι (i) $f_n(z) = z^n - 1 = 0$, ή (ii) $z = 0$, για κάθε $n = 3, 4, \dots$. Έτσι, το $z = 0$ είναι ένα ανεπιθύμητο απωστικό πρόσθετο περιοδικό σημείο περιόδου 2, διότι $L(0) = \infty$ και $L(\infty) = 0$. Οι λεκάνες έλξης για $n = 2, 3, 4, 5, 6$ και 7 παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.44(α), (β), (γ), 4.45(α), (β), (γ) αντιστοίχως, όπου τα μικρά ημικύκλια (ή κύκλοι) υποδηλώνουν τη θέση των αντιστοίχων ριζών. Τα Σχήματα 4.46 και 4.47 δείχνουν τα αντίστοιχα

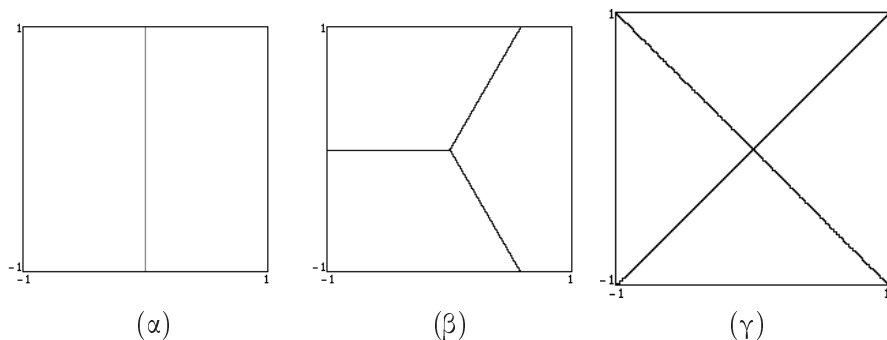


Σχήμα 4.44: Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_n(z) = z^n - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Laguerre: (α) $n = 2$, (β) $n = 3$, (γ) $n = 4$.

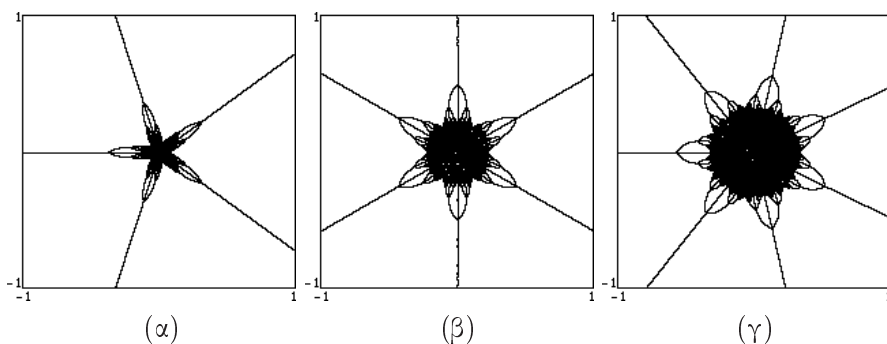


Σχήμα 4.45: Λεκάνες έλξης των ριζών του $f_n(z) = z^n - 1$ στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Laguerre: (α) $n = 5$, (β) $n = 6$, (γ) $n = 7$.

σύνολα Julia $J(L(f_n))$ για $n = 2, 3, 4, 5, 6$ και 7. Παρατηρούμε ότι για $n = 2, 3$ και 4 η σύγκλιση της μεθόδου είναι απόλυτη, ενώ για $n > 4$ υπάρχει διαταραχή των άμεσων λεκανών έλξης των ριζών κοντά σε μια μικρή περιοχή γύρω από το μηδέν.



Σχήμα 4.46: Σύνολα Julia της, εφαρμοζόμενης επί των $f_n(z) = z^n - 1$, συνάρτησης Laguerre στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) $n = 2$, (β) $n = 3$, (γ) $n = 4$.

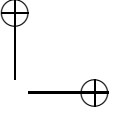
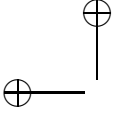


Σχήμα 4.47: Σύνολα Julia της, εφαρμοζόμενης επί των $f_n(z) = z^n - 1$, συνάρτησης Laguerre στο μιγαδικό χωρίο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. (α) $n = 5$, (β) $n = 6$, (γ) $n = 7$.

4.5 Συμπεράσματα

Σε πρακτικής φύσης προβλήματα υπάρχει αρκετή εκ των προτέρων γνώση της επιθυμητής ρίζας της εξίσωσης για να εξασφαλιστεί η σύγκλιση των επαναλήψεων. Όταν η εκ των προτέρων γνώση είναι φτωχή, είναι γνωστό ότι συνήθως συνίσταται η χρήση μιας μεθόδου, η οποία συγκλίνει ανεξαρτήτως αρχικών τιμών (όπως η μέθοδος Laguerre) έως ότου επιτευχθεί μια καλή προσέγγιση και τότε μεταπηδούμε σε μία πιο ταχείας σύγκλισης μέθοδο, όπως οι μέθοδοι Schröder και König. Η μέθοδος Newton–Raphson δουλεύει, αλλά αργά, αφού μπορούν να εμφανιστούν μεγάλα σφάλματα στρογγύλευσης.

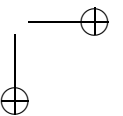
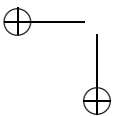
Η εμφάνιση πρόσθετων σταθερών σημείων, όπως φαίνεται στα Σχήματα 4.2–4.7 και στα Σχήματα 4.33–4.36, είναι ένα εμφανές παράδειγμα της προσοχής που απαιτείται κατά την επιλογή αρχικών τιμών σε αυτές τις, υψηλής τάξης, επαναληπτικές ακολουθίες, οι οποίες οδηγούν κατά κανόνα σε «μικρότερες» λεκάνες έλξης. Σχήματα όπως τα 4.42(γ) και 4.43(γ) αποκαλύπτουν την αξιοσημείωτη σχεδόν αυ-

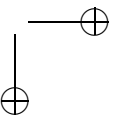
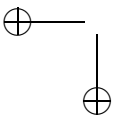
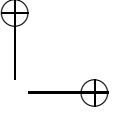
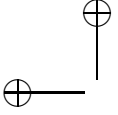


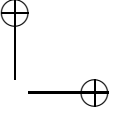
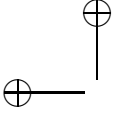
τομοιότητα και πολυπλοκότητα του οριακού μορφοκλασματικού συνόλου Julia. Η αύξηση της τάξης των συναρτήσεων König δεν επιφέρει κάποια διαφορετική εικόνα στις λεκάνες έλξης, διότι, όπως αποδείξαμε, τα πρόσθετα σταθερά σημεία της μεθόδου είναι απωστικά, οπότε ανήκουν στο σύνολο Julia της συνάρτησης. Συνεπώς, τα σημεία αυτά, κινούνται διαρκώς πάνω στις χαοτικές περιοχές που προκύπτουν από το σύνολο Julia και δεν διαφοροποιούν τις λεκάνες έλξης των ριζών. Η συνάρτηση Laguerre έχει άριστα αποτελέσματα σε πολυώνυμα μέχρι τετάρτου βαθμού, ενώ για μεγαλύτερου βαθμού πολυώνυμα έχει πολύ καλά αποτελέσματα μόνο αν μεγαλώσουμε την ακτίνα σύγκλισής της, διότι παρουσιάζει μορφοκλασματικά σύνολα σε μια μικρή περιοχή γύρω από το μηδέν, η οποία μεγαλώνει καθώς αυξάνεται η τάξη του πολυωνύμου.

Η μεθοδολογία του Εδαφίου 4.2.2 στοχεύει στο γενικευμένο υπολογισμό των όρων των επαναληπτικών συναρτήσεων Schröder, όπως και στην αύξηση της υπολογιστικής απόδοσης αυτών των συναρτήσεων που σχετίζονται με την μονοπαραμετρική οικογένεια των κυβικών πολυωνύμων· ο σκοπός αυτός επιτεύχθηκε ανακατασκευάζοντας τις S_σ . Η υπολογιστική αυτή τεχνική εφαρμόζεται γενικότερα και όχι μόνο για τις συναρτήσεις Schröder ή μόνο για την μονοπαραμετρική οικογένεια των κυβικών πολυωνύμων. Για παράδειγμα, μία καταλλήλως τροποποιημένη εκδοχή αυτής της τεχνικής χρησιμοποιήθηκε για να αναλύσει τις επαναληπτικές συναρτήσεις König και μια συγκεκριμένη μονοπαραμετρική οικογένεια τεταρτοβαθμίων πολυωνύμων.

Από τα σχήματα των Παραγράφων 4.2.6 και 4.3.5 παρατηρούμε ότι, για το ίδιο παράθυρο, το κύριο άθος τείνει να καταλάβει όλη την δοθείσα περιοχή καθώς αυξάνεται το σ . Οι γραφικές παραστάσεις προτείνουν, όπως και προηγουμένως, ότι καθώς η τάξη των συναρτήσεων Schröder ή ακόμη και της König αυξάνεται, το πλήθος των αρχικών σημείων που μπορεί κανείς να επιλέξει μειώνεται, επιφέροντας (με δυσκολία) τη σύγκλιση των αρχικών τιμών προς την επιθυμητή ρίζα. Υπάρχουν περιοχές στον παραμετρικό χώρο, όπου τα κρίσιμα σημεία των S_σ ή K_σ έλκονται σε σημεία ή κύκλους, οι οποίοι δεν αντιστοιχούν σε ρίζες των πολυωνύμων. Αυτές οι περιοχές εμφανίζουν τη μορφολογία και τα χαρακτηριστικά συνόλων τύπου Mandelbrot. Αυτό επαληθεύει γραφικώς πως όταν χρησιμοποιούμε μια επαναληπτική μέθοδο η προσπάθεια ελάττωσης του σφάλματος, δηλ. αύξηση της τάξης σ , επάγει απώλεια περιοχών σύγκλισης.







Κεφάλαιο 5

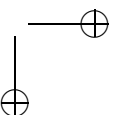
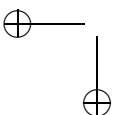
Μορφοκλασματικές συναρτήσεις και παρεμβολή

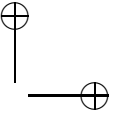
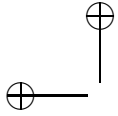
Η Ευκλείδεια Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός μας δίδαξαν να βλέπουμε τα αντικείμενα του φυσικού μας κόσμου ως ευθείες, κύκλους, παραβολές και άλλες απλές καμπύλες. Απόρροια αυτού του τρόπου σκέψης υπάρχουν άφθονες στην καθημερινή μας ζωή: ο σχεδιασμός κτηρίων, δρόμων, οικιακών συσκευών κ.ά.

Οι στοιχειώδεις συναρτήσεις, όπως οι τριγωνομετρικές και οι ρητές, έχουν τις ρίζες τους στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και αποτελούν τη βάση των παραδοσιακών μεθόδων για ανάλυση πειραματικών δεδομένων, όπου ως πείραμα μπορεί να θεωρηθεί μία απλή αριθμητική εφαρμογή σε έναν Η/Υ έως και μία πολύπλοκη φυσική μέτρηση. Το κοινό τους γνώρισμα είναι ότι, αν οι γραφικές παραστάσεις τους μεγθυνθούν αρκετά, μοιάζουν τοπικά με ευθείες γραμμές. Επί πλέον, η διάσταση των γραφικών τους παραστάσεων είναι πάντα ίση με τη μονάδα. Ο τύπος τους είναι απλός, άρα ο τρόπος υπολογισμού τους είτε είναι εύκολος, είτε μπορεί να πραγματοποιηθεί με απλούς υπολογισμούς σε σύντομο, σχετικά, χρονικό διάστημα. Άρα, τα συστήματα γραφικής σχεδίασης που βασίζονται στην παραδοσιακή γεωμετρία, μπορούν να δημιουργήσουν εικόνες που έχουν όμως ένα κοινό χαρακτηριστικό: Έχουν κατασκευασθεί από το ανθρώπινο χέρι.

Τι συμβαίνει όμως με τα αντικείμενα που δεν έχουν κατασκευασθεί από ανθρώπινο χέρι, όπως βουνά, σύννεφα ή πιο πολύπλοκες εικόνες, όπως κορυφογραμμές ή ένα τοπίο. Αυτές οι εικόνες αποτελούν ένα περίπλοκο σύστημα, το οποίο δεν μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά χρησιμοποιώντας συστήματα γραφικής σχεδίασης βασισμένα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Μια λύση στο πρόβλημα αυτό δίνεται με τη χρήση μορφοκλασματικών συναρτήσεων παρεμβολής. Ο υπολογισμός μιας μορφοκλασματικής συνάρτησης παρεμβολής μπορεί να μας δώσει έναν τύπο με τον οποίο μπορούμε γρήγορα να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης σε ένα σημείο. Έχουν ακόμα το πλεονέκτημα, επειδή η μορ-





φοκλασματική τους διάσταση είναι διάφορη της μονάδας, ότι μέσω αυτών μπορούμε να υπολογίσουμε, άρα και να εμφανίσουμε, τη γραφική παράσταση συναρτήσεων που δεν καλύπτουν οι βασιζόμενες στην Ευκλείδεια Γεωμετρία τεχνικές.

Οι μορφοκλασματικές συναρτήσεις παρεμβολής αποτελούν και έναν νέο τρόπο προσαρμογής πειραματικών δεδομένων. Η μέθοδος λ.χ. των Ελαχίστων Τετραγώνων δε θα ταίριαζε σε διάσπαρτα πειραματικά δεδομένα, όπως αυτά θα προέκυπταν, για παράδειγμα, από την ανάλυση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε ένα σημείο του ανθρώπινου εγκεφάλου, από τις μετρήσεις ενός σειсмоγράφου ή από τις μετρήσεις των δεικτών του χρηματιστηρίου. Η ανάλυση τέτοιου είδους συναρτήσεων απαιτεί να δουλεύει κανείς με σύνολα παρά με σημεία χρησιμοποιώντας επαναλαμβανόμενα συστήματα συναρτήσεων και συγγενείς απεικονίσεις.

5.1 Επαναλαμβανόμενα συστήματα συναρτήσεων

Η μέθοδος των επαναλαμβανόμενων συστημάτων συναρτήσεων, εισαχθείσα από τον Hutchinson στην [95] και καταστείσα δημοφιλής από τους Barnsley [16] και Demko [46], είναι ένας σχετικά εύκολος τρόπος για την παραγωγή μορφοκλασματικών συνόλων.

Έστω $X, Y \subset \mathbb{R}^n$. Μία συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$ ονομάζεται *συνάρτηση Hölder εκθέτη a* , αν

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^a$$

για κάθε $x, y \in X$, $a \geq 0$ και για κάποια σταθερά c . Προφανώς, $c \geq 0$. Η συνάρτηση f ονομάζεται *συνάρτηση Lipschitz*, αν το a μπορεί να ληφθεί ίσο με το 1. Μια συνάρτηση Lipschitz ονομάζεται *συστολή με παράγοντα συσταλτικότητας c* , αν $c < 1$. Ένα επαναλαμβανόμενο σύστημα συναρτήσεων ή ΕΣΣ, χάριν συντομίας, είναι μια συλλογή ενός πλήρους μετρικού χώρου (X, ρ) μαζί με ένα πεπερασμένο σύνολο συνεχών απεικονίσεων $w_n: X \rightarrow X$, $n = 1, 2, \dots, N$, όπου ρ είναι η συνάρτηση απόστασης μεταξύ των στοιχείων του X . Είναι συνήθως βολικό να γράφουμε ένα ΕΣΣ τυπικώς ως $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ ή, κάπως πιο σύντομα, ως $\{X; w_{1-N}\}$.

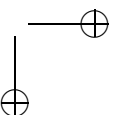
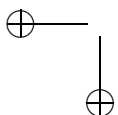
Ορισμός 5.1.1 Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Με $\mathcal{H}(X)$ συμβολίζουμε τον χώρο του οποίου σημεία είναι τα συμπαγή, διαφορετικά του κενού, υποσύνολα του X , δηλαδή

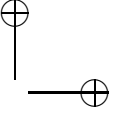
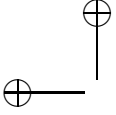
$$\mathcal{H}(X) = \{\emptyset \neq A \subset X : A \text{ συμπαγές}\}.$$

Ενίοτε ο $\mathcal{H}(X)$ αναφέρεται ως ο «χώρος των μορφοκλασματικών στο X » (αλλά σημειώστε ότι δεν είναι όλα τα μέλη του X μορφοκλασματικά).

Ορισμός 5.1.2 Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Η μετρική Hausdorff μεταξύ των σημείων A και B του $\mathcal{H}(X)$ ορίζεται από την

$$h(A, B) = \max\{\max_{x \in A} d(x, B), \max_{x \in B} d(x, A)\},$$





όπου $d(x, B) = \min\{\rho(x, b) : b \in B\}$.

Συνεπώς, ο $\mathcal{H}(X)$, εφοδιασμένος με την απόσταση Hausdorff, γίνεται μετρικός χώρος.

Εισάγουμε την, σχετιζόμενη με σύνολα, απεικόνιση $W: \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$W(E) = \bigcup_{n=1}^N w_n(E) \text{ για κάθε } E \in \mathcal{H}(X). \quad (5.1)$$

Η απεικόνιση W ονομάζεται απεικόνιση αλληλοεπικάλυψης, προς επαγρύπνηση του γεγονότος ότι η $W(E)$ έχει σχηματισθεί ως ένωση ή αλληλοεπικάλυψη συνόλων.

Αν ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, τότε ο χώρος $\mathcal{H}(X)$ είναι συμπαγής, οπότε το ΕΣΣ $\{X; w_{1-N}\}$ επιδέχεται τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(X)$ (βλ. [117], Πρόβλημα 5.1.25, σ. 67).

Αν οι w_n είναι συστολές με αντίστοιχους παράγοντες συσταλτικότητας s_n για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$, το ΕΣΣ ονομάζεται υπερβολικό και η απεικόνιση W είναι συστολή με παράγοντα συσταλτικότητας $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ (πρβ. [15], Θεώρημα 7.1, σ. 81). Συνεπώς, ο ελκυστής ενός υπερβολικού ΕΣΣ είναι, σύμφωνα και με τον Ορισμό 2.2.2, το μοναδικό σύνολο \mathcal{A} για το οποίο ισχύει $\lim_{k \rightarrow \infty} W^k(E_0) = \mathcal{A}$ για κάθε σύνολο εκκίνησης E_0 . Ο όρος ελκυστής επιλέχθηκε, ώστε να υποδείξει την μετακίνηση του E_0 προς το \mathcal{A} κάτω από διαδοχικές εφαρμογές της W . Το \mathcal{A} είναι επίσης το μοναδικό σύνολο στο $\mathcal{H}(X)$, το οποίο δεν μεταβάλλεται από την W : έτσι $W(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ και από αυτήν την σημαντική άποψη συχνά καλείται το αναλλοίωτο σύνολο του ΕΣΣ. Τα παραπάνω συνοψίζονται στο ακόλουθο

Θεώρημα 5.1.1 Έστω $\{X; w_{1-N}\}$ ένα υπερβολικό ΕΣΣ με παράγοντα συσταλτικότητας s . Τότε ο μετασχηματισμός $W: \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ με

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$$

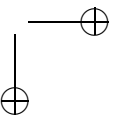
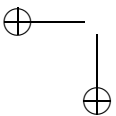
για κάθε $B \in \mathcal{H}(X)$, είναι μια απεικόνιση συστολής επί του πλήρους μετρικού χώρου $(\mathcal{H}(X), h(\rho))$ με παράγοντα συσταλτικότητας s . Το μοναδικό σταθερό σημείο της, $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(X)$, ικανοποιεί την

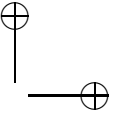
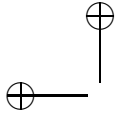
$$\mathcal{A} = W(\mathcal{A}) = \bigcup_{n=1}^N w_n(\mathcal{A})$$

και δίνεται από την

$$\mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$$

για κάθε $B \in \mathcal{H}(X)$.





Ορισμός 5.1.3 Το μοναδικό σταθερό σημείο $A \in \mathcal{H}(X)$ που περιγράφηκε στο Θεώρημα 5.1.1 ονομάζεται ο ελκυστής του ΕΣΣ.

Ένας μετασχηματισμός w είναι συγγενής, αν μπορεί να αναπαρασταθεί από μία μήτρα A και μία μετατόπιση \mathbf{t} ως $w(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}$. Π.χ. αν $X = \mathbb{R}^2$,

$$w \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

ενώ αν $X = \mathbb{R}^3$

$$w \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & k & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \\ m \\ r \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

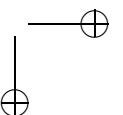
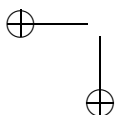
Ο κώδικας του w είναι η εξάδα (a, b, c, s, d, e) ή η δωδεκάδα $(a, b, c, d, e, g, h, k, s, l, m, r)$ και ο κώδικας ενός ΕΣΣ είναι μια μήτρα της οποίας οι γραμμές είναι οι κώδικες των w_1, w_2, \dots, w_N . Παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στις [15] και [90] για περισσότερες πληροφορίες επί των ΕΣΣ, καθώς και στις [31], [73], [79], [85], [104] και [162] για προχωρημένες εφαρμογές τους.

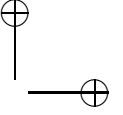
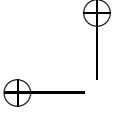
5.2 Μορφοκλασματικές συναρτήσεις παρεμβολής

Η παρεμβολή βρίσκεται στην καρδιά της κλασσικής Αριθμητικής Ανάλυσης. Σχεδόν όλες οι κλασσικές μέθοδοι της αριθμητικής παραγωγίσισης, του αριθμητικού τετραγωνισμού και της αριθμητικής ολοκλήρωσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων παράγονται απ' ευθείας από τύπους παρεμβολής.

Επειδή εμείς ενδιαφερόμαστε ειδικώς για υπολογιστικές εφαρμογές, δε θα δώσουμε έμφαση σε παραδοσιακές μεθόδους παρεμβολής. Εστιάζουμε την προσοχή μας σε μία ειδική κατηγορία συνεχών συναρτήσεων συχνά αναφερόμενες ως μορφοκλασματικές συναρτήσεις, αφού τα διαγράμματά τους έχουν συνήθως μη ακέραια διάσταση. Αυτές οι συναρτήσεις είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν για παρεμβολή και, κατ' αυτήν την έννοια, είναι ανάλογες προς τις splines και τις πολυωνυμικές παρεμβολές.

Βασίζόμενος σ' ένα θεώρημα του Hutchinson ([95], σ. 730) και χρησιμοποιώντας τη θεωρία των ΕΣΣ, ο Barnsley, εισήγαγε μια κατηγορία συναρτήσεων στην [14] τις οποίες απεκάλεσε μορφοκλασματικές συναρτήσεις παρεμβολής ή ΜΣΠ χάριν συντομίας. Εργάστηκε κυρίως με συγγενείς ΜΣΠ, οι οποίες επιτυγχάνονται χρησιμοποιώντας συγγενείς μετασχηματισμούς. Πιο γενικοί μετασχηματισμοί απ' τους συγγενείς συζητούνται στις [80] και [83], αλλά δεν υπάρχει σ' αυτές καμμία ένδειξη ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για παρεμβολή. Τα κοινά σημεία των συγγενών ΜΣΠ και των στοιχειωδών συναρτήσεων είναι ο γεωμετρικός τους χαρακτήρας και





ο ακριβής υπολογισμός τους. Η κυριότερη διαφορά τους είναι ο μορφοκλασματικός χαρακτήρας των πρώτων. Τα διαγράμματα αυτών των συναρτήσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν, ώστε να προσεγγίσουμε τα συστατικά μιας εικόνας, όπως οι κατατομές των οροσειρών, οι κορυφές των νεφών και οι ορίζοντες πάνω από τα δάση. Πρόσφατες εφαρμογές αυτής της θεωρίας περιλαμβάνουν το σχεδιασμό διακριτών ακολουθιών, όπως στην [113], σχεδιασμό σημάτων ομιλίας, όπως στην [154] και συμπύεση στατικών εικόνων, όπως στην [3].

Έστω ότι η συνεχής συνάρτηση f είναι ωρισμένη στο κλειστό διάστημα των πραγματικών αριθμών $I = [x_0, x_N]$ και με πεδίο τιμών έναν πλήρη μετρικό χώρο (Y, ρ_Y) , όπου x_0, x_1, \dots, x_N είναι $N + 1$ διακεκριμένα σημεία και $x_0 < x_1 < \dots < x_N$. Τα σημεία αυτά δεν θεωρούνται ισάπεχοντα. Η συνάρτηση f ονομάζεται *συνάρτηση παρεμβολής* αντιστοιχούσα στο γενικευμένο σύνολο δεδομένων $\{(x_i, y_i) \in I \times Y : i = 0, 1, \dots, N\}$, εάν $f(x_i) = y_i$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, N$. Θα γράφουμε, χάριν συντομίας, $f(x_i) = f_i$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, N$. Τα σημεία (x_i, f_i) ονομάζονται *σημεία παρεμβολής*. Λέμε ότι η συνάρτηση f *παρεμβάλλει* τα δεδομένα και ότι η γραφική παράστασή της f διέρχεται δια μέσου των σημείων παρεμβολής.

Σ' αυτήν την παράγραφο εστιάζουμε την προσοχή μας στην ύπαρξη, την κατασκευή και τις ιδιότητες τέτοιων συναρτήσεων των οποίων η γραφική παράσταση $G = \{(x, f(x)) : x \in I\}$ είναι ελκυστής κάποιων ΕΣΣ. Σ' ολόκληρο το κεφάλαιο θα εργασθούμε στον πλήρη μετρικό χώρο $K = I \times Y$ ως προς την ευκλείδεια μετρική ή ως προς την ισοδύναμη με αυτήν

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, \rho_Y(y_1, y_2)\} \quad (5.4)$$

για κάθε $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία των [14], [15], [19] και [112], κατασκευάζουμε με έναν πιο ευκρινή τρόπο μορφοκλασματικές συναρτήσεις ικανές να παρεμβάλουν το προαναφερθέν γενικευμένο σύνολο δεδομένων.

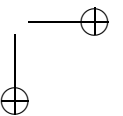
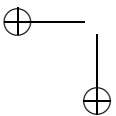
Θέτουμε $I_n = [x_{n-1}, x_n]$ και έστω ότι οι $L_n: I \rightarrow I_n$, για $n = 1, 2, \dots, N$, είναι συστολικοί ομοιομορφισμοί τέτοιοι, ώστε

$$L_n(x_0) = x_{n-1}, \quad L_n(x_N) = x_n, \quad (5.5)$$

$$|L_n(b_1) - L_n(b_2)| \leq l |b_1 - b_2| \quad (5.6)$$

για κάθε $b_1, b_2 \in I$ και για κάποιο $l \in [0, 1)$. Προφανώς, το σύνολο $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ αποτελεί έναν διαμερισμό του συμπαγούς διαστήματος I . Σημειώστε επίσης ότι το $\{I; L_{1-N}\}$ είναι ένα υπερβολικό ΕΣΣ του οποίου ο μοναδικός ελκυστής είναι

$$I = \bigcup_{n=1}^N L_n(I) = \bigcup_{n=1}^N I_n,$$



όπου

$$I_n^\circ \cap I_m^\circ = \emptyset, \text{ αν } n \neq m \text{ για κάθε } n, m = 1, 2, \dots, N. \quad (5.7)$$

Με άλλα λόγια, οι L_n ικανοποιούν τη συνθήκη του ανοικτού συνόλου για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$ και επίσης

$$I_n \cap I_{n+1} = x_n \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (5.8)$$

Επί πλέον, έστωσαν συνεχείς απεικονίσεις $M_n: K \rightarrow Y$ για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$ τέτοιες, ώστε

$$M_n(x_0, f_0) = f_{n-1}, \quad M_n(x_N, f_N) = f_n, \quad (5.9)$$

$$\rho_Y(M_n(x, b_1), M_n(x, b_2)) \leq s \rho_Y(b_1, b_2) \quad (5.10)$$

για κάθε $x \in I$, $b_1, b_2 \in Y$ και για κάποιο $s \in [0, 1)$. Η Συνθήκη (5.10) σημαίνει ότι οι M_n είναι συστολές ως προς τη δεύτερη μεταβλητή για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$.

Τώρα ορίζουμε τις συναρτήσεις $w_n: K \rightarrow K$ με

$$w_n(x, y) = (L_n(x), M_n(x, y)) \quad (5.11)$$

για κάθε $(x, y) \in K$ και $n = 1, 2, \dots, N$.

Αν $Y = [a, b]$ για κάποια $-\infty < a < b < \infty$, στην [14] αποδεικνύεται το ακόλουθο

Θεώρημα 5.2.1 *Το ως άνω ορισθέν ΕΣΣ $\{K; w_{1-N}\}$ έχει έναν μοναδικό ελκυστή $G \in \mathcal{H}(K)$. Ο G είναι η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f: I \rightarrow Y$, η οποία ικανοποιεί την*

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Ορισμός 5.2.1 *Η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι ο ελκυστής ενός ΕΣΣ όπως περιγράφηκε στο Θεώρημα 5.2.1, ονομάζεται μορφοκλασματική συνάρτηση παρεμβολής ή ΜΣΠ χάριν συντομίας.*

Παρατηρήστε ότι το ΕΣΣ $\{K; w_{1-N}\}$ μπορεί να μην είναι υπερβολικό. Για να κατασκευάσουμε ένα υπερβολικό ΕΣΣ του οποίου ο ελκυστής είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, θεωρούμε τη γενική περίπτωση, όπου Y είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος και ότι οι απεικονίσεις M_n , $n = 1, 2, \dots, N$ όχι μόνο ικανοποιούν τη Συνθήκη (5.10), αλλά και την

$$\rho_Y(M_n(b_1, y), M_n(b_2, y)) \leq c |b_1 - b_2| \quad (5.12)$$

για κάθε $y \in Y$, $b_1, b_2 \in I$, $n = 1, 2, \dots, N$ και για κάποιο $c > 0$. Αυτή η συνθήκη σημαίνει ότι οι M_n είναι ομοιομόρφως Lipschitz ως προς την πρώτη μεταβλητή για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$.

Αφού η πληρότητα εξαρτάται από την επιλογή της μετρικής, ας αποδείξουμε πρώτα το ακόλουθο

Θεώρημα 5.2.2 Υπάρχει μια, ισοδύναμη με την ευκλείδεια, μετρική ρ_ϕ στο K τέτοια, ώστε το ΕΣΣ $\{K; w_{1-N}\}$ είναι υπερβολικό ως προς τη ρ_ϕ .

Απόδειξη. Ορίζουμε μια μετρική ρ_ϕ στο K με τύπο

$$\rho_\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \phi \rho_Y(y_1, y_2),$$

για κάθε $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K$, όπου ϕ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός ο οποίος θα καθορισθεί παρακάτω. Είναι προφανές ότι η ρ_ϕ είναι πράγματι μετρική και ότι είναι ισοδύναμη προς την ευκλείδεια μετρική στο K .

Για να δείξουμε την υπερβολικότητα, σημειώστε ότι για κάθε $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K$ και $n = 1, 2, \dots, N$ έχει κανείς

$$\begin{aligned} \rho_\phi(w_n(x_1, y_1), w_n(x_2, y_2)) &= \rho_\phi((L_n(x_1), M_n(x_1, y_1)), (L_n(x_2), M_n(x_2, y_2))) \\ &= |L_n(x_1) - L_n(x_2)| + \phi \rho_Y(M_n(x_1, y_1), M_n(x_2, y_2)) \\ &\leq l |x_1 - x_2| + \phi \rho_Y(M_n(x_1, y_1), M_n(x_2, y_1)) \\ &\quad + \phi \rho_Y(M_n(x_2, y_1), M_n(x_2, y_2)) \\ &\leq l |x_1 - x_2| + \phi c |x_1 - x_2| + \phi s \rho_Y(y_1, y_2) \\ &= (l + \phi c) |x_1 - x_2| + \phi s \rho_Y(y_1, y_2) \\ &\leq q \rho_\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)), \end{aligned}$$

όπου $q = \max\{l + \phi c, s\}$. Εάν επιλέξουμε $\phi = (1 - l)/(2c)$ τότε $q < 1$ και αυτό συμπληρώνει την απόδειξη. \square

Αν και η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος είναι όμοια μ' αυτήν που περιέχεται στην [19], το αποδεικνύουμε εδώ με κάθε λεπτομέρεια για λόγους πληρότητας.

Θεώρημα 5.2.3 Το ως άνω ορισθέν υπερβολικό ΕΣΣ $\{K; w_{1-N}\}$ έχει έναν μοναδικό ελκυστή $G \in \mathcal{H}(K)$. Επί πλέον, ο G είναι η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f: I \rightarrow Y$, η οποία ικανοποιεί την

$$f(x_i) = y_i \text{ για κάθε } i = 0, 1, \dots, N.$$

Απόδειξη. Έστω ότι \mathcal{F} συμβολίζει το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f: I \rightarrow Y$ που είναι τέτοιο, ώστε $f(x_0) = y_0$ και $f(x_N) = y_N$. Ορίζουμε μια μετρική ρ στο \mathcal{F} με

$$\rho(f, g) = \max\{\rho_Y(f(x), g(x)) : x \in I\}$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{F}$. Τότε ο (\mathcal{F}, ρ) είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $C(I)$ και έτσι είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος.

Έστω ότι $f \in \mathcal{F}$. Ορίζουμε μια απεικόνιση $\Phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ με τύπο

$$(\Phi f)(x) = M_n(L_n^{-1}(x), f(L_n^{-1}(x)))$$

για κάθε $x \in I_n$ και $n = 1, 2, \dots, N$.

Επαληθεύουμε ότι η Φ είναι καλώς ωρισμένη και ότι πράγματι απεικονίζει το \mathcal{F} στον εαυτό του. Σύμφωνα με τις Εξισώσεις (5.7) και (5.8) η $\Phi(f)$ είναι καλώς ωρισμένη στο $I \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$. Απομένει να δείξουμε ότι η $\Phi(f)$ είναι καλώς ωρισμένη σε καθ' ένα από τα σημεία x_i , $i = 0, 1, \dots, N$. Παρατηρήστε πρώτα ότι, λόγω των Συνθηκών (5.5) και (5.9),

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow x_n \\ x \in I_n}} (\Phi f)(x) &= M_n(L_n^{-1}(x_n), f(L_n^{-1}(x_n))) = M_n(x_N, f(x_N)) = M_n(x_N, f_N) \\ &= M_{n+1}(x_0, f_0) = M_{n+1}(x_0, f(x_0)) \\ &= M_{n+1}(L_{n+1}^{-1}(x_n), f(L_{n+1}^{-1}(x_n))) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_n \\ x \in I_{n+1}}} (\Phi f)(x), \end{aligned}$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots, N-1$, το οποίο δείχνει ότι η $\Phi(f)$ είναι καλώς ωρισμένη και συνεχής σε καθ' ένα από τα σημεία x_i , $i = 0, 1, \dots, N$.

Επί πλέον, η συνάρτηση $\Phi(f)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του τελικού σημείου επειδή

$$(\Phi f)(x_0) = M_1(L_1^{-1}(x_0), f(L_1^{-1}(x_0))) = M_1(x_0, f(x_0)) = y_0$$

και

$$(\Phi f)(x_N) = M_N(L_N^{-1}(x_N), f(L_N^{-1}(x_N))) = M_N(x_N, f(x_N)) = y_N.$$

Η L_n είναι συνεχής με συνεχή αντίστροφο, η f θεωρήθηκε συνεχής και η M_n είναι συγγενής (συνεχής), οπότε η Φ είναι συνεχής σε καθ' ένα από τα συμπαγή σύνολα I_n . Άρα, πράγματι, η $\Phi f \in \mathcal{F}$.

Τώρα δείχνουμε ότι η Φ είναι μια απεικόνιση συστολής στον μετρικό χώρο (\mathcal{F}, ρ) . Έστω ότι $f, g \in \mathcal{F}$ και $x \in I_n$ για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$. Τότε

$$\begin{aligned} \rho_Y(\Phi f(x), \Phi g(x)) &= \rho_Y(M_n(L_n^{-1}(x), f(L_n^{-1}(x))), M_n(L_n^{-1}(x), g(L_n^{-1}(x)))) \\ &\leq s \rho_Y(f(L_n^{-1}(x)), g(L_n^{-1}(x))) \\ &\leq s \rho(f, g). \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\rho(\Phi f, \Phi g) \leq s \rho(f, g)$ και συμπεραίνουμε ότι η $\Phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ είναι απεικόνιση συστολής.

Το Θεώρημα Απεικόνισης Συστολής 5.1.1 επάγει ότι η Φ έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο στο \mathcal{F} , δηλαδή

$$(\Phi f)(x) = f(x)$$

ή, ισοδυνάμως,

$$M_n(x, f(x)) = f(L_n(x)),$$

για κάθε $x \in I$ και $n = 1, 2, \dots, N$.

Συμβολίστε τον μοναδικό ελκυστή του $\{K; w_{1-N}\}$ με G . Όπως αναφέραμε προηγουμένως το $\{I; L_{1-N}\}$ είναι επίσης ένα υπερβολικό ΕΣΣ του οποίου ο μοναδικός ελκυστής είναι το I . Η γραφική παράσταση \widehat{G} της f είναι επίσης ελκυστής του $\{K; w_{1-N}\}$, διότι

$$\begin{aligned} W(\widehat{G}) &= \bigcup_{n=1}^N w_n(\widehat{G}) = \bigcup_{n=1}^N w_n(\{(x, f(x)) : x \in I\}) \\ &= \bigcup_{n=1}^N \{(L_n(x), M_n(x, f(x))) : x \in I\} = \bigcup_{n=1}^N \{(L_n(x), f(L_n(x))) : x \in I\} \\ &= \widehat{G}. \end{aligned}$$

Άρα η γραφική παράσταση της f είναι ένας ελκυστής για το ΕΣΣ $\{K; w_{1-N}\}$ και έτσι θα πρέπει να είναι ίση με το G . \square

5.3 Συγγενείς μορφοκλασματικές συναρτήσεις παρεμβολής

Ο Barnsley ισχυρίζεται στην [14], σ. 308, ότι το πρότυπό του έχει κάποιον ελκυστή (τη γραφική παράσταση G της ΜΣΠ) που βρίσκεται μέσα σε έναν «μεγαλύτερο» συμπαγή μετρικό χώρο από αυτόν του Hutchinson [95]. Αν και ορίζει την μορφοκλασματική παρεμβολή έτσι, ώστε να λαμβάνει χώρα στο συμπαγή μετρικό χώρο $K = I \times [a, b]$, όπου I και $[a, b]$ είναι κλειστά διαστήματα των πραγματικών αριθμών, δεν αναφέρει τίποτα για τις συνθήκες που πρέπει να πληρούν οι κατακόρυφοι παράγοντες κλιμάκωσης, ώστε το G να παραμένει εντός του ορθογωνίου K . Μία πιθανή εξήγηση αυτού είναι ότι λαμβάνει το $[a, b]$ να είναι «αρκετά ευρύ» για παράδειγμα, το διάστημα αυτό στις [15] και [19] ταυτίζεται τελικώς με το ίδιο το \mathbb{R} , οπότε το G ταιριάζει τελικώς στο K . Κατ' αυτόν τον τρόπο κατασκευάζει κανείς την παρεμβολή ανεξαρτήτως των συνόρων του χώρου που εργάζεται.

Ο στόχος αυτής της ενότητας είναι να πληρώσει αυτό το κενό και να καταστήσει τη συγγενή μορφοκλασματική παρεμβολή πιο ευέλικτη στο χειρισμό καταστάσεων, όπου τα δεδομένα μας πρέπει να παρεμβληθούν μέσα σε ένα αρχικώς δοσμένο πλαίσιο. Αυτό γίνεται εφικτό αποδεικνύοντας ότι οι κατακόρυφοι παράγοντες κλιμάκωσης εξαρτώνται μόνο από τα δεδομένα μας και έτσι μπορούν να παραχθούν αυτομάτως. Μ' αυτόν τον τρόπο, όταν οι κατακόρυφοι παράγοντες κλιμάκωσης επιλεγθούν αυθαίρετως, μπορεί κανείς να διορθώσει εξ αρχής τη συνολική προσεγγιστική μορφή της ΜΣΠ. Άρα θα είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε ΜΣΠ των οποίων οι συνολικές μορφές και διαστάσεις μπορούν να προκαθορισθούν. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ χρήσιμο και στο πρόβλημα εξακρίβωσης της παραμέτρου, όσον αφορά στον υπολογισμό των παραγόντων συστατικότητας της ΜΣΠ.

Θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε συγγενείς μετασχηματισμούς. Έστω ότι N είναι ένας θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1. Ορίζουμε τις $L_n: I \rightarrow I_n$ με

$$L_n(x) = a_n x + d_n,$$

όπου οι πραγματικοί αριθμοί a_n, d_n για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$ έχουν επιλεχθεί έτσι, ώστε να εξασφαλίζουν την ισχύ της Συνθήκης (5.5), δηλ. ότι $L_n(I) = I_n$. Άρα, για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0}, \\ d_n &= \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0}. \end{aligned}$$

Αφού $N \geq 2$, τότε $|a_n| < 1$, οπότε οι L_n είναι συστολικοί ομοιομορφισμοί, για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$, καθώς πληρούν τη Συνθήκη (5.6) με $l = \max\{|a_n| : n = 1, 2, \dots, N\}$.

Ορίζουμε τις $M_n: K \rightarrow Y$, όπου $Y = \mathbb{R}$, με

$$M_n(x, y) = c_n x + s_n y + e_n$$

όπου οι πραγματικές σταθερές c_n και e_n , εξαρτώμενες από τη ρυθμιζόμενη πραγματική παράμετρο s_n , επιλέγονται έτσι, ώστε να εξασφαλίζουν την ισχύ της Συνθήκης (5.9). Δηλαδή, πρώτα επιλέγονται οι $s_n \in (-1, 1)$ και μετά οι

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{f_n - f_{n-1}}{x_N - x_0} - s_n \frac{f_N - f_0}{x_N - x_0}, \\ e_n &= \frac{x_N f_{n-1} - x_0 f_n}{x_N - x_0} - s_n \frac{x_N f_0 - x_0 f_N}{x_N - x_0} \end{aligned}$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$. Οι απεικονίσεις M_n , $n = 1, 2, \dots, N$ πληρούν τη Συνθήκη (5.10) με $s = \max\{|s_n| : n = 1, 2, \dots, N\}$ και τη Συνθήκη (5.12) με $c = \max\{|c_n| : n = 1, 2, \dots, N\}$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις w_n , όπως στην Εξ. (5.11). Τότε το ΕΣΣ είναι της μορφής $\{K; w_{1-N}\}$, όπου οι απεικονίσεις είναι συγγενείς μετασχηματισμοί, όπως στην (5.2) και, συγκεκριμένα, της ειδικής μορφής

$$w_n \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & 0 \\ c_n & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_n \\ e_n \end{bmatrix},$$

όπου a_n, c_n, s_n, d_n και e_n είναι πραγματικοί αριθμοί για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$. Οι μετασχηματισμοί w_n είναι μετασχηματισμοί διάτμησης, όπου s_n είναι οι κατακόρυφοι παράγοντες κλιμάκωσης αυτών. Πράγματι, ο μετασχηματισμός w_n είναι ένας μετασχηματισμός ο οποίος απεικονίζει ευθείες παράλληλες προς τον άξονα των y σε

ευθείες παράλληλες προς τον άξονα των y , διότι αν L είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο προς τον άξονα των y , τότε και το $w_n(L)$ θα είναι παράλληλο προς τον άξονα των y . Επιλέγοντας ως ελεύθερη παράμετρο το s_n ισχύει ότι $|w_n(L)|/|L| = |s_n|$ και αν $s_n \in (-1, 1)$, είμαστε σε θέση να καθορίσουμε την παραγόμενη από τον μετασχηματισμό κατακόρυφη κλιμάκωση.

Οι μετασχηματισμοί αυτοί, περιοριζόμενοι από τις Συνθήκες (5.5) και (5.9), μας δίνουν

$$w_n \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \text{ και } w_n \begin{bmatrix} x_N \\ f_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ f_n \end{bmatrix} \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots, N.$$

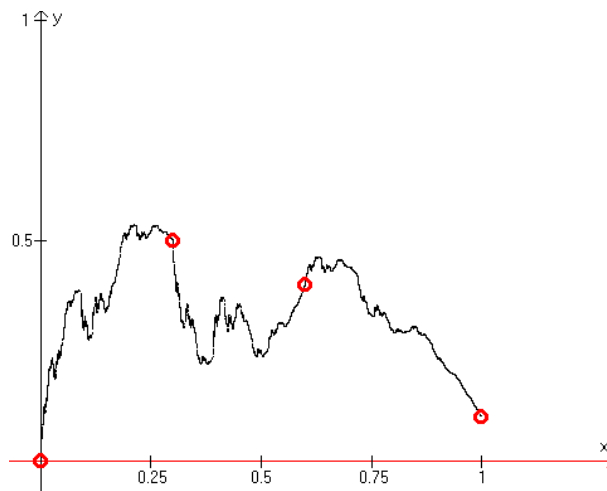
Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 5.2.3 και 5.2.2 με το ως άνω ορισμένο ΕΣΣ $\{K; w_{1-N}\}$ έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.3.1 Η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι ο ελκυστής ενός ΕΣΣ, όπως περιγράφηκε προηγουμένως, ονομάζεται συγγενής μορφοκλασματική συνάρτηση παρεμβολής ή ΣΜΣΠ χάριν συντομίας.

Παράδειγμα 5.3.1 Έστωσαν $I = [0, 1]$, $Y = [0, 1]$ και έστω

$$\{(0, 0), (0.3, 0.5), (0.6, 0.4), (1, 0.1)\}$$

ένα δοθέν σύνολο δεδομένων. Στο Σχήμα 5.1 βλέπουμε τη γραφική παράσταση μιας



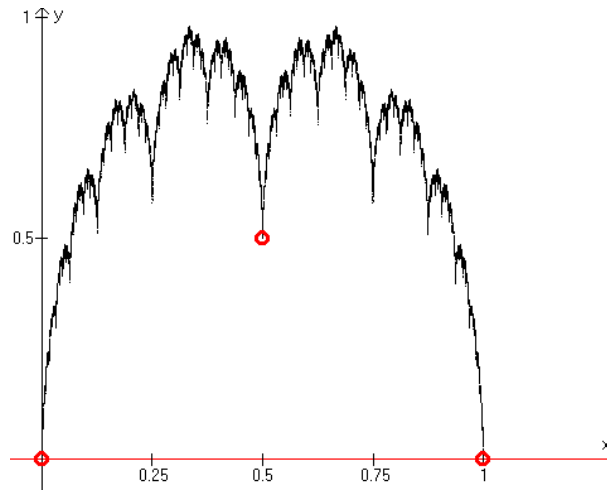
Σχήμα 5.1: Η γραφική παράσταση μιας ΣΜΣΠ.

συγγενούς μορφοκλασματικής συνάρτησης παρεμβολής με $s_1 = 0.5$, $s_2 = -0.5$ και $s_3 = 0.23$.

Παράδειγμα 5.3.2 Έστωσαν $I = [0, 1]$, $Y = [0, 1]$ και έστω

$$\{(0, 0), (0.5, 0.5), (1, 0)\}$$

ένα δοθέν σύνολο δεδομένων. Στο Σχήμα 5.2 βλέπουμε τη γραφική παράσταση μιας



Σχήμα 5.2: Η γραφική παράσταση μιας ΣΜΣΠ.

συγγενούς μορφοκλασματικής συνάρτησης παρεμβολής με $s_1 = s_2 = s_3 = 2/3$.

Στις περισσότερες των περιπτώσεων, λ.χ. συμπίεση εικόνας, δίνεται μόνο κάποιος «μικρότερος» χώρος από τον $Y = \mathbb{R}$ και εμείς πρέπει να παρεμβάλουμε τα δεδομένα μας εντός ενός δοθέντος ορθογωνίου. Συνήθως ο Y θεωρείται ως ένα κλειστό διάστημα των πραγματικών αριθμών $[a, b]$, το οποίο είναι συμπαγές και επομένως πλήρης μετρικός χώρος. Για να εξασφαλίσουμε ότι η γραφική παράσταση της ΣΜΣΠ περιέχεται μέσα στο ορθογώνιο K , πρέπει να καθορίσουμε κάποιες συνθήκες που πρέπει να πληρούν οι ρυθμιζόμενες παράμετροι s_n . Το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο εισαγάγαμε στην [45], μας βοηθά στην εξακρίβωση των κατακόρυφων παραγόντων κλιμάκωσης που χρειάζονται, ώστε να μοντελοποιήσουμε μία αυθαίρετη συνάρτηση.

Θεώρημα 5.3.1 Η γραφική παράσταση μιας ΣΜΣΠ παραμένει εντός ενός δοθέντος ορθογωνίου $K = I \times [a, b]$, αν οι κατακόρυφοι παράγοντες κλιμάκωσης s_n πληρούν τις

$$s_n^{\min} \leq s_n \leq s_n^{\max}$$

και $|s_n| < 1$, όπου

$$s_n^{\max} = \min \left\{ \frac{b - f_n}{b - f_N}, \frac{b - f_{n-1}}{b - f_0}, \frac{a - f_n}{a - f_N}, \frac{a - f_{n-1}}{a - f_0} \right\},$$

$$s_n^{min} = \max \left\{ \frac{a - f_{n-1}}{b - f_0}, \frac{a - f_n}{b - f_N}, \frac{b - f_{n-1}}{a - f_0}, \frac{b - f_n}{a - f_N} \right\}$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$. Τα φράγματα αυτά είναι τα καλύτερα δυνατά.

Απόδειξη. Οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές των

$$M_n(x, y) = c_n x + s_n y + e_n$$

στο ορθογώνιο $[x_0, x_N] \times [a, b]$ επιτυγχάνονται στα ακραία σημεία (x_0, a) , (x_0, b) , (x_N, a) , (x_N, b) . Βλ. για παράδειγμα [105]. Εφ' όσον απαιτούμε το $M_n(x, y) \in [a, b]$, επιλέγουμε τις παραμέτρους s_n τέτοιες, ώστε $M_n(x_0, a)$, $M_n(x_0, b)$, $M_n(x_N, a)$, $M_n(x_N, b) \in [a, b]$. Ευκόλως συμπεραίνουμε ότι οι s_n πληρούν τις απαιτούμενες ανισώσεις. Στην περίπτωση μηδενικού παρονομαστή αποφεύγουμε τον αντίστοιχο όρο. Το αντίστροφο είναι προφανές. \square

Άλλο ένα που έπεται από το θεώρημα είναι το γεγονός ότι οι s_n μπορούν να ρυθμιστούν αυτομάτως και να καθοριστούν μέσω των διαδοχικών σημείων παρεμβολής f_{n-1} και f_n , των τελικών σημείων f_0 και f_N , καθώς και των δοθέντων συντεταγμένων a και b .

Παράδειγμα 5.3.3 Έστωσαν $I = [0, 1]$, $Y = [-1, 1]$ και έστω

$$\{(0, 0), (1/2, -1/3), (3/4, 1/2), (1, 1/3)\}$$

ένα δοθέν σύνολο δεδομένων. Τότε η γραφική παράσταση της ΣΜΣΠ παραμένει εντός του ορθογωνίου $K = I \times Y$, αν επιλέξουμε τους s_n , $n = 1, 2, 3$ τέτοιους, ώστε $-1 < s_1 \leq 1/2$, $-3/8 \leq s_2 \leq 2/3$ και $-1/2 \leq s_3 \leq 1/2$. Το Σχήμα 5.3 δείχνει αυτήν την γραφική παράσταση με $s_1 = -0.99$, $s_2 = -3/8$ και $s_3 = -1/2$.

Παράδειγμα 5.3.4 Έστωσαν $I = [0, 1]$, $Y = [-1/2, 1/2]$ και έστω

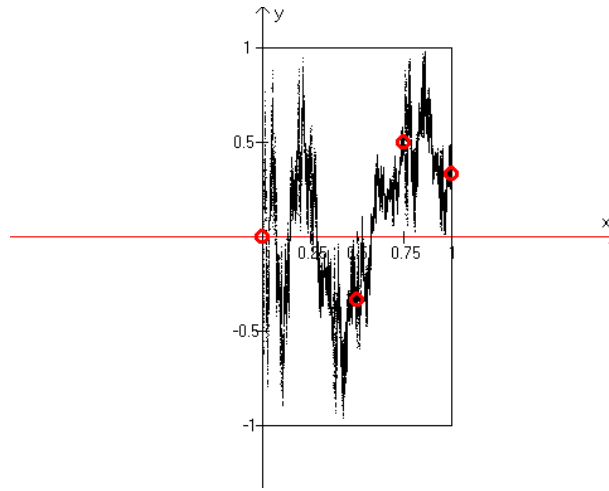
$$\{(0, 0), (1/2, -1/3), (3/4, 1/2), (1, 1/3)\}$$

ένα δοθέν σύνολο δεδομένων. Τότε, η γραφική παράσταση της ΣΜΣΠ παραμένει εντός του ορθογωνίου $K = I \times Y$, αν επιλέξουμε τους s_n , $n = 1, 2, 3$ τέτοιους, ώστε $-1 < s_1 \leq 1/2$ και $s_2 = s_3 = 0$. Το Σχήμα 5.4 δείχνει αυτήν την γραφική παράσταση με $s_1 = -0.99$ και $s_2 = s_3 = 0$.

Από το Θεώρημα 5.3.1 προκύπτουν τα ακόλουθα χρήσιμα πορίσματα.

Πόρισμα 5.3.1 Η γραφική παράσταση μιας ΣΜΣΠ παραμένει εντός ενός δοθέντος ορθογωνίου $K = I \times [a, b]$ με $f_0 = f_N$, αν οι κατακόρυφοι παράγοντες κλιμάκωσης s_n πληρούν τις

$$s_n^{min} \leq s_n \leq s_n^{max}$$



Σχήμα 5.3: Η γραφική παράσταση μιας φραγμένης ΣΜΣΠ.

και $|s_n| < 1$, όπου

$$s_n^{max} = \min \left\{ \frac{b - \max\{f_{n-1}, f_n\}}{b - f_0}, \frac{a - \max\{f_{n-1}, f_n\}}{a - f_0} \right\},$$

$$s_n^{min} = \max \left\{ \frac{a - \min\{f_{n-1}, f_n\}}{b - f_0}, \frac{b - \min\{f_{n-1}, f_n\}}{a - f_0} \right\}$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$. Τα φράγματα αυτά είναι τα καλύτερα δυνατά.

Πόρισμα 5.3.2 Η γραφική παράσταση μιας ΣΜΣΠ παραμένει εντός μιας δοθείσης λωρίδας $K = I \times [a, \infty)$ με $f_0 = f_N$, αν οι κατακόρυφοι παράγοντες κλιμάκωσης s_n πληρούν τις

$$0 \leq s_n \leq s_n^{max},$$

και $|s_n| < 1$, όπου

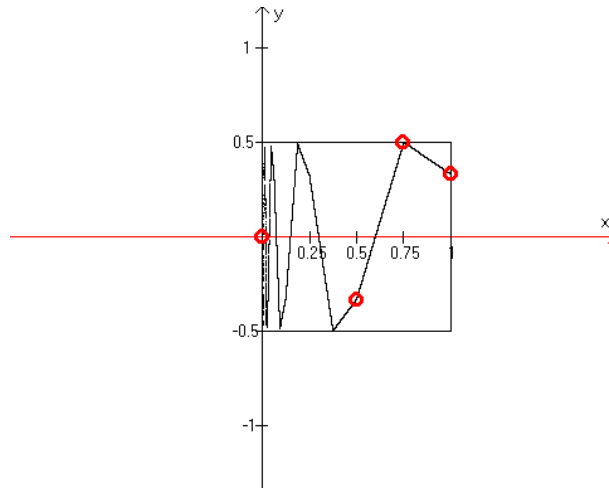
$$s_n^{max} = \frac{a - \max\{f_{n-1}, f_n\}}{a - f_0},$$

για $n = 1, 2, \dots, N$. Τα φράγματα αυτά είναι τα καλύτερα δυνατά.

5.4 Μορφοκλασματική παρεμβολή με χρήση κρυφής μεταβλητής

Στη συνέχεια δείχνουμε, με ποιον τρόπο χρησιμοποιείται η ιδέα των γενικευμένων μορφοκλασματικών συναρτήσεων παρεμβολής από τον M. F. Barnsley και τους συνεργάτες του στην [19], για να κατασκευάσουν πιο ευέλικτες συναρτήσεις παρεμβολής. Η ιδέα είναι να κατασκευασθεί μια γενικευμένη μορφοκλασματική συνάρτηση

5.4 Μορφοκλασματική παρεμβολή με χρήση κρυφής μεταβλητής 123



Σχήμα 5.4: Η γραφική παράσταση μιας φραγμένης ΣΜΣΠ.

παρεμβολής χρησιμοποιώντας συγγενείς μετασχηματισμούς στον \mathbb{R}^3 και να προβάλουμε το γράφημά της στον \mathbb{R}^2 . Οι πρόσθετοι βαθμοί ελευθερίας που μας δίνει το γεγονός ότι δουλεύουμε στον \mathbb{R}^3 λέγονται *κρυφές μεταβλητές*. Αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη ρύθμιση της μορφής και της μορφοκλασματικής διάστασης των συναρτήσεων παρεμβολής. Επίσης, με αυτόν τον τρόπο, διατηρούνται τα πλεονεκτήματα που μας δίνει η χρήση των συγγενών μετασχηματισμών.

Έστω ένας θετικός ακέραιος N μεγαλύτερος του 1. Ορίζουμε τις $L_n: I \rightarrow I_n$ με

$$L_n(x) = a_n x + k_n,$$

όπου οι πραγματικοί αριθμοί a_n, k_n για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$, έχουν επιλεχθεί έτσι, ώστε να εξασφαλίζουν την ισχύ της Συνθήκης (5.5), δηλ. ότι $L_n(I) = I_n$. Άρα για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0}, \quad (5.13)$$

$$k_n = \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0}. \quad (5.14)$$

Αφού $N \geq 2$, τότε $|a_n| < 1$, οπότε οι L_n είναι συστολικοί ομοιομορφισμοί, για $n = 1, 2, \dots, N$, καθώς πληρούν τη Συνθήκη (5.6) με $l = \max\{|a_n| : n = 1, 2, \dots, N\}$.

Έστω τώρα ότι $Y = \mathbb{R}^2$ και ορίζουμε τις $M_n: K \rightarrow U$ με

$$M_n \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_n \\ g_n \end{bmatrix} x + A_n \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_n \\ m_n \end{bmatrix},$$

όπου

$$A_n = \begin{bmatrix} d_n & e_n \\ h_n & s_n \end{bmatrix}$$

και οι $c_n, g_n, d_n, e_n, h_n, s_n, l_n, m_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, για $n = 1, 2, \dots, N$. Ας αντικαταστήσουμε τις f_n στη Συνθήκη (5.9) με τις (f_n, H_n) , για $n = 1, 2, \dots, N$. Οι πραγματικές σταθερές c_n, g_n, l_n, m_n , εξαρτώμενες από τις ρυθμιζόμενες πραγματικές παραμέτρους d_n, e_n, h_n, s_n , έχουν επιλεγθεί έτσι, ώστε να εξασφαλίζουν την ισχύ της Συνθήκης (5.9), δηλ.

$$c_n = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_N - x_0} - d_n \frac{f_N - f_0}{x_N - x_0} - e_n \frac{H_N - H_0}{x_N - x_0}, \quad (5.15)$$

$$g_n = \frac{H_n - H_{n-1}}{x_N - x_0} - h_n \frac{f_N - f_0}{x_N - x_0} - s_n \frac{H_N - H_0}{x_N - x_0}, \quad (5.16)$$

$$l_n = \frac{x_N f_{n-1} - x_0 f_n}{x_N - x_0} - d_n \frac{x_N f_0 - x_0 f_N}{x_N - x_0} - e_n \frac{x_N H_0 - x_0 H_N}{x_N - x_0}, \quad (5.17)$$

$$m_n = \frac{x_N H_{n-1} - x_0 H_n}{x_N - x_0} - h_n \frac{x_N f_0 - x_0 f_N}{x_N - x_0} - s_n \frac{x_N H_0 - x_0 H_N}{x_N - x_0}, \quad (5.18)$$

για $n = 1, 2, \dots, N$. Αν ορίσουμε

$$c = \max\{\max\{c_n, g_n\} : n = 1, 2, \dots, N\},$$

η Συνθήκη (5.12) είναι αληθής. Υποθέτουμε ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός $A_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι συστολή με παράγοντα συσταλτικότητας $s \in [0, 1)$. Τότε η Συνθήκη (5.10) είναι αληθής. Ορίζουμε συναρτήσεις w_n όπως στην Εξ. (5.11). Τότε το ΕΣΣ είναι της μορφής $\{K; w_{1-N}\}$, όπου οι απεικονίσεις είναι συγγενείς μετασχηματισμοί όπως στην (5.3) και, συγκεκριμένα, της ειδικής μορφής

$$w \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & 0 & 0 \\ c_n & d_n & e_n \\ g_n & h_n & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_n \\ l_n \\ m_n \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

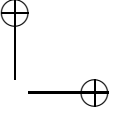
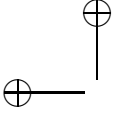
όπου οι $a_n, c_n, d_n, e_n, g_n, h_n, s_n, k_n, l_n, m_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Αυτοί οι μετασχηματισμοί, περιοριζόμενοι από τις Συνθήκες (5.5) και (5.9), δίνουν

$$w_n \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0 \\ H_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ f_{n-1} \\ H_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad w_n \begin{bmatrix} x_N \\ f_N \\ H_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ f_n \\ H_n \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$. Τότε έχουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 5.4.1 *Ο ελκυστής του ως άνω ωρισμένου ΕΣΣ $\{K; w_{1-N}\}$ είναι η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f: I \rightarrow Y$, η οποία πληροί την*

$$f(x_i) = (y_i, H_i), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$



5.4 Μορφοκλασματική παρεμβολή με χρήση κρυφής μεταβλητής 125

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτήν του Θεωρήματος 5.2.3. \square

Τώρα γράφουμε

$$f(x) = (F_1(x), F_2(x)).$$

Τότε η $F_1: I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε

$$F_1(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Ορισμός 5.4.1 Η συνάρτηση F_1 που κατασκευάστηκε προηγουμένως, καλείται συγγενής μορφοκλασματική συνάρτηση παρεμβολής κρυφής μεταβλητής ή ΣΜΣΠΚΜ χάριν συντομίας.

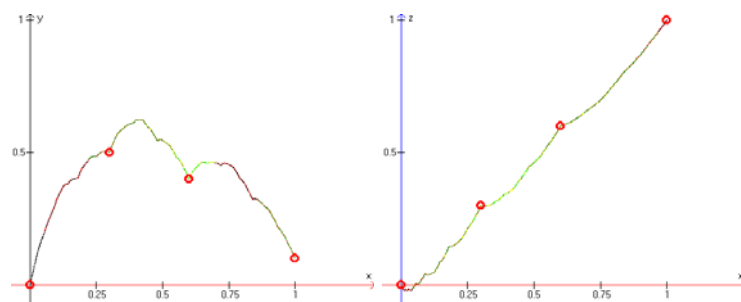
w	d	e	h	s
1	0.3	0.2	-0.1	0.3
2	0.3	0.2	-0.1	0
3	0.3	0.1	-0.1	-0.1

Πίνακας 5.1: Ο κώδικας του ΕΣΣ για τη ΣΜΣΠΚΜ που κατασκευάστηκε στο Παράδειγμα 5.4.1.

Παράδειγμα 5.4.1 Ας λάβουμε $N = 3$ και το σύνολο των δεδομένων

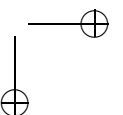
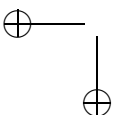
$$\{(0, 0, 0), (0.3, 0.5, 0.3), (0.6, 0.4, 0.6), (1, 0.1, 1)\}.$$

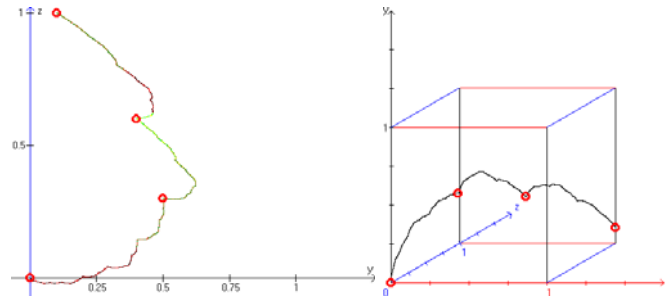
Οι απεικονίσεις w_n , $n = 1, 2, \dots, N$ είναι της μορφής (5.19) και επιλεγμένες έτσι ώστε να ισχύει η (5.20). Η επίλυση των (5.19) και (5.20) αποφέρει τις σταθερές a_n, c_n, g_n, k_n, l_n και m_n . Οι υπόλοιπες σταθερές δίνονται στον Πίνακα 5.1. Διά-



Σχήμα 5.5: Δύο ορθογώνιες προβολές του διαγράμματος μιας ΣΜΣΠΚΜ.

φορες απόψεις του ελκυστή G για το ως άνω ορισθέν ΕΣΣ εικονογραφούνται στα Σχήματα 5.5 και 5.6.





Σχήμα 5.6: Ορθογώνια και Cabinet προβολή του διαγράμματος μιας ΣΜΣΠΚΜ.

Το σημαντικότερο σημείο της μορφοκλασματικής παρεμβολής με κρυφή μεταβλητή είναι τούτο. Αν και ο ελκυστής του ΕΣΣ είναι η ένωση των συγγενών μετασχηματισμών που εφαρμόζονται στον ελκυστή, αυτό δεν ισχύει γενικώς όταν αντικαταστήσουμε τον όρο «ελκυστής» με τη φράση «προβολή του ελκυστή». Η γραφική παράσταση της ΜΣΠΚΜ F_1 δεν είναι αυτοόμοια ούτε αυτοσυγγενής.

Η ιδέα των ΜΣΠΚΜ μπορεί να αναπτυχθεί χρησιμοποιώντας οιοδήποτε πλήθος κρυφών μεταβλητών. Καθώς το πλήθος, όμως, των διαστάσεων αυξάνεται, η διαδικασία καθορισμού της συνάρτησης γίνεται ολοένα και δυσκολότερη, ενώ η συνάρτηση ολοένα και πιο τυχαία.

5.5 Πολικές μορφοκλασματικές συναρτήσεις παρεμβολής

Εισάγουμε τις πολικές ΜΣΠ οι οποίες μπορούν να χειριστούν ένα εκτενέστερο εύρος δεδομένων, εξ αιτίας του μη συγγενούς χαρακτήρα τους, ο οποίος βασίζεται στον πολικό μετασχηματισμό. Τελικώς, αποδεικνύουμε ότι η διάσταση Hausdorff της γραφικής παράστασης της συνάρτησης παρεμβολής μας στις συντεταγμένες του επιπέδου, είναι ίδια με αυτήν της, μετασχηματισμένης σε πολικές συντεταγμένες, γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Ωρισμένες πεπλεγμένες συναρτησιακές σχέσεις μπορούν να μετασχηματισθούν σε άλλα είδη μεταβλητών ή συντεταγμένων. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι σε πολικές συντεταγμένες κατά τον οποίο λαμβάνουμε

$$E = \{(\theta, r) : 0 \leq \theta < 2\pi, r > 0\}$$

και θέτουμε $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ να είναι ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων (για τον ορισμό του βλ. [4]) ο οποίος απεικονίζει κάθε σημείο (θ, r) του E επί του σημείου $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ μέσω των γνωστών τύπων

$$x = g_1(\theta, r) = r \cos \theta, \quad y = g_2(\theta, r) = r \sin \theta. \quad (5.21)$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα θεώρημα, το οποίο μας υποδεικνύει πως, αν μεταφέρουμε το πολικό μοντέλο μας στο σύνηθες επίπεδο, τότε λαμβάνουμε μία απλή κλειστή (δηλ. Θορδαν) καμπύλη η οποία παρεμβάλλει τα αρχικά μας δεδομένα.

Θεώρημα 5.5.1 Έστω ότι δίνεται ένα σύνολο δεδομένων $\{(x_i, f_i) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : i = 0, 1, \dots, N-1\}$ του οποίου τουλάχιστον ένα σημείο (x_i, f_i) βρίσκεται σε κάθε τεταρτημόριο και έστω ότι $\{(\theta_i, r_i) \in [0, 2\pi) \times (0, \infty) : i = 0, 1, \dots, N-1\}$ είναι το αντίστοιχο του σύνολο σε πολικές συντεταγμένες, όπου $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{N-1} < \theta_N = 2\pi$. Τότε υπάρχει μια απλή κλειστή καμπύλη $\mathbf{r}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{r}(\theta_i) = (x_i, f_i)$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, N-1$, η οποία προκύπτει ως ελκυστής ενός ΕΣΣ.

Απόδειξη. Έστω ότι $\hat{I} = [\theta_0, \theta_N]$, όπου $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N$ είναι $N+1$ διακεκριμένα σημεία και $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{N-1} < \theta_N = 2\pi$. Δεν υποθέτουμε ότι τα σημεία αυτά είναι ισαπέχοντα. Επιλέξτε $\alpha > 0$ κατά τέτοιο τρόπο, ώστε $r_i \in \hat{Y}$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, N-1$, όπου $\hat{Y} = [\alpha, \beta]$ (αντ. $\hat{Y} = [\alpha, \infty)$). Θα δουλέψουμε στους πλήρεις μετρικούς χώρους $K = I \times Y$ και $\hat{K} = \hat{I} \times \hat{Y}$ ως προς την ευκλείδεια, ή ως προς κάποια άλλη ισοδύναμη, μετρική, όπου $I = [x_0, x_{N-1}]$ και $Y = [a, b]$.

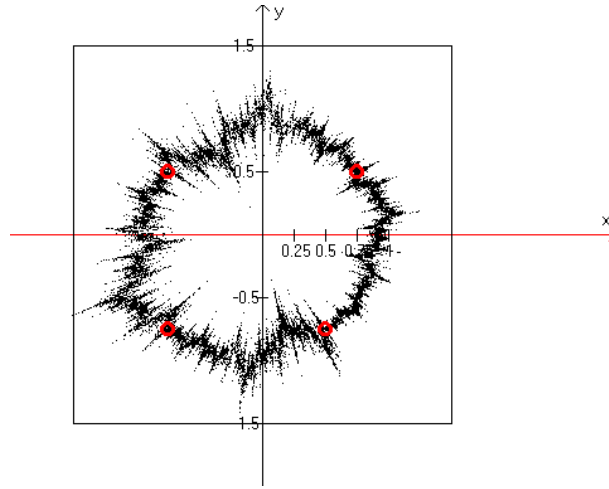
Κατασκευάστε μια συνάρτηση $r: \hat{I} \rightarrow \hat{Y}$ με $r(\theta_i) = r_i, i = 0, 1, \dots, N-1$ και $r_N = r_0$ χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία με αυτήν που περιγράφηκε στα Θεωρήματα 5.2.3 και 5.2.2. Για να εξασφαλίσουμε ότι $r(\theta) \in \hat{Y}$, επιλέγουμε τους κατακορύφους παράγοντες κλιμάκωσης του πολικού μοντέλου μας με τη βοήθεια του Πορίσματος 5.3.1 (αντ. του Πορίσματος 5.3.2): θα δείξουμε στη συνέχεια ότι σχηματίζεται μια απλή κλειστή καμπύλη, η οποία περνά δια μέσου κάθε σημείου παρεμβολής (x_i, f_i) για κάθε $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων \mathbf{g} και ο αντίστροφός του \mathbf{g}^{-1} καθορίζουν μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των συμπαγών υποσυνόλων του E και των συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbf{g}(E)$. Αφού $r(\theta) > 0$, η καμπύλη $\mathbf{r}(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$ είναι απλή για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ και κλειστή επειδή $r(\theta_0) = r(\theta_N)$. Έπεται, ότι η συνεχής συνάρτηση $\mathbf{r}: \hat{I} \rightarrow K$, με $\mathbf{r}(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$, είναι μια καλώς ωρισμένη συνάρτηση η οποία πληροί την $\mathbf{r}(\theta_i) = (x_i, f_i)$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, N-1$ και της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια κλειστή καμπύλη. \square

Ορισμός 5.5.1 Η συνάρτηση \mathbf{r} της οποίας η γραφική παράσταση είναι ο ελκυστής ενός ΕΣΣ όπως περιγράφηκε παραπάνω, ονομάζεται πολική μορφοκλασματική συνάρτηση παρεμβολής ή ΠΜΣΠ χάριν συντομίας.

Λάβετε υπ' όψιν ότι αυτή η συνάρτηση είναι μία μη συγγενής, διανυσματικής τιμής ΜΣΠ, σε αντίθεση με τις συγγενείς που εισήχθησαν στην [111].

Παράδειγμα 5.5.1 Έστω $\{(-3/4, -1/2), (1/2, 3/4), (3/4, -1/2), (-3/4, 3/4)\}$ ένα δοθέν σύνολο δεδομένων. Το Σχήμα 5.7 δείχνει την γραφική παράσταση μιας



Σχήμα 5.7: Η γραφική παράσταση μιας ΠΜΣΠ.

ΠΜΣΠ με $s_1 = s_3 = -0.9, s_2 = 0.9, s_4 = 1/2$, ενώ το Σχήμα 5.8 δείχνει την γραφική παράσταση της ίδιας ΠΜΣΠ αλλά σε πολικές συντεταγμένες.

Το τελευταίο που απομένει είναι να αποδείξουμε ότι η νέα μας καμπύλη έχει την ίδια διάσταση Hausdorff, \dim_H , όπως η αντίστοιχί της σε πολικές συντεταγμένες. Πρωτίστως χρειαζόμαστε την ακόλουθη

Πρόταση 5.5.1 Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$. Αν $\mathbf{f}: F \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι μια συνάρτηση Lipschitz, τότε

$$\dim_H \mathbf{f}(F) \leq \dim_H F.$$

Απόδειξη. Βλ. [67], Πρόρισμα 2.4(α), σ. 30. \square

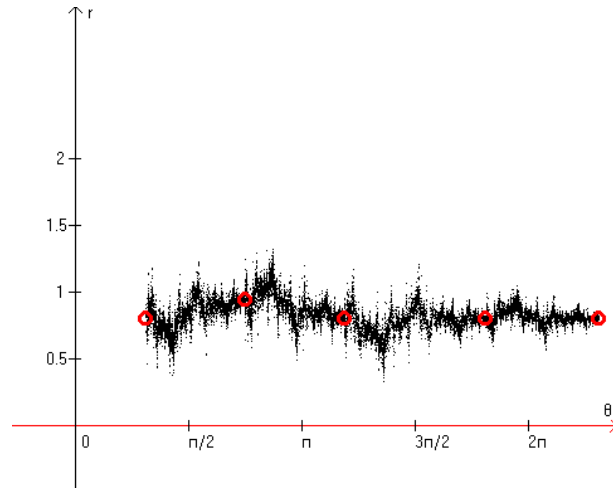
Θεώρημα 5.5.2 Έστω ότι \widehat{G} και G συμβολίζουν την γραφική παράσταση της r και της \mathbf{r} , αντιστοίχως. Τότε $\dim_H \widehat{G} = \dim_H G$.

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε το \mathbb{R}^2 ως προς τη μετρική

$$\|x - y\|_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η $\mathbf{g}: \widehat{G} \rightarrow G$ είναι μια συνάρτηση Lipschitz. Έστωσαν $(\theta_1, r_1), (\theta_2, r_2) \in \widehat{G}$. Τότε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}(\theta_1, r_1) - \mathbf{g}(\theta_2, r_2)\|_1 &\leq \|\mathbf{g}(\theta_1, r_1) - \mathbf{g}(\theta_1, r_2)\|_1 + \|\mathbf{g}(\theta_1, r_2) - \mathbf{g}(\theta_2, r_2)\|_1 \\ &= |r_1 - r_2| |\cos \theta_1| + |r_1 - r_2| |\sin \theta_1| \\ &\quad + r_2 |\cos \theta_1 - \cos \theta_2| + r_2 |\sin \theta_1 - \sin \theta_2| \\ &\leq 2|r_1 - r_2| + 2r_2 |\theta_1 - \theta_2| \leq 2|r_1 - r_2| + 2b|\theta_1 - \theta_2| \\ &\leq c \|(\theta_1, r_1) - (\theta_2, r_2)\|_1, \end{aligned}$$



Σχήμα 5.8: Η γραφική παράσταση μιας ΠΜΣΠ σε πολικές συντεταγμένες.

όπου $c = \max\{2, 2b\}$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.5.1 έχουμε ότι $\dim_H G = \dim_H \mathbf{g}(\widehat{G}) \leq \dim_H \widehat{G}$.

Έστω τώρα ότι $G^{(j)}$ είναι η τομή του G με το j τεταρτημόριο έτσι, ώστε $G = \bigcup_{j=1}^4 G^{(j)}$. Από την κατασκευή του G έχουμε ότι, αν $(x, y) \in G^{(1)}$, τότε $x + y \geq a$, άρα η κυρτή θήκη $S = \text{conv}(G^{(1)})$ είναι ένα κυρτό και συμπαγές σύνολο το οποίο δεν περιέχει το κέντρο $(0, 0)$. Τότε, υπάρχει η $\mathbf{g}^{-1}: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{g}^{-1} = (h_1, h_2)$ και έχουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι $\partial h_i / \partial x, \partial h_i / \partial y$, $i = 1, 2$ είναι συνεχείς στο S . Άρα είναι φραγμένες στο S και έστω ότι $M > 0$ είναι ένα φράγμα αυτών. Έστωσαν $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G^{(1)}$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε

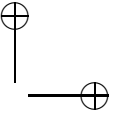
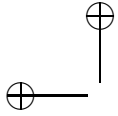
$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}^{-1}(x_1, y_1) - \mathbf{g}^{-1}(x_2, y_2)\|_1 &= |h_1(x_1, y_1) - h_1(x_2, y_2)| \\ &\quad + |h_2(x_1, y_1) - h_2(x_2, y_2)| \\ &= |dh_1(a_1, a_2)(x_1 - x_2, y_1 - y_2)| \\ &\quad + |dh_2(b_1, b_2)(x_1 - x_2, y_1 - y_2)| \end{aligned}$$

για κάποια $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in [(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \subset S$. Όμως

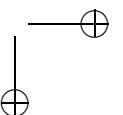
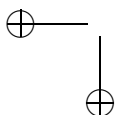
$$\begin{aligned} |dh_i(x, y)(x_1 - x_2, y_1 - y_2)| &= \left| \frac{\partial h_i(x, y)}{\partial x}(x_1 - x_2) + \frac{\partial h_i(x, y)}{\partial y}(y_1 - y_2) \right| \\ &\leq M(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \\ &= M\|(x_1, x_2) - (y_1, y_2)\|_1 \end{aligned}$$

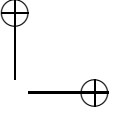
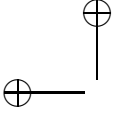
για κάθε $(x, y) \in S$ και $i = 1, 2$. Άρα

$$\|\mathbf{g}^{-1}(x_1, y_1) - \mathbf{g}^{-1}(x_2, y_2)\|_1 \leq 2M\|(x_1, x_2) - (y_1, y_2)\|_1.$$



Με άλλα λόγια, η \mathbf{g}^{-1} είναι μια συνάρτηση Lipschitz στο S . Επομένως, $\dim_H \mathbf{g}^{-1}(G^{(1)}) \leq \dim_H G^{(1)} \leq \dim_H G$. Ομοίως, $\dim_H \mathbf{g}^{-1}(G^{(j)}) \leq \dim_H G$, $j = 2, 3, 4$. Η Πρόταση 5.5.1 επάγει ότι $\dim_H \widehat{G} = \dim_H \mathbf{g}^{-1}G = \dim_H \mathbf{g}^{-1}(\bigcup_{j=1}^4 G^{(j)}) \leq \dim_H G$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square





Κεφάλαιο 6

Καμπύλες γεμίζουσες τον χώρο

Ο G. Peano στα 1890 κατασκεύασε την πρώτη καμπύλη, η οποία περνά δια μέσου κάθε σημείου του μοναδιαίου τετραγώνου $[0, 1] \times [0, 1]$. Συνεχείς απεικονίσεις από το $[0, 1]$ (ή οιοδήποτε άλλο διάστημα) στο επίπεδο (ή στον χώρο) με αυτήν την ιδιότητα καλούνται *καμπύλες γεμίζουσες τον χώρο* ή *καμπύλες Peano*. Περαιτέρω παραδείγματα ακολούθησαν από τους D. Hilbert (στα 1891), E. H. Moore (στα 1900), H. Lebesgue (στα 1904), E. Cesàro (στα 1905), W. Sierpiński (στα 1912), G. Pólya (στα 1913) και άλλων.

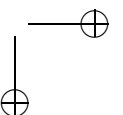
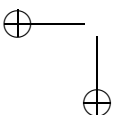
Τέτοιου είδους καμπύλες κατασκευάζονται συνήθως χρησιμοποιώντας την ακόλουθη τεχνική. Ξεκινάμε με έναν *ενάρκτη* που μπορεί να είναι μια ευθεία γραμμή ή ένα πολύγωνο. Στη συνέχεια, κάθε πλευρά του ενάρκτη αντικαθίσταται από έναν *γεννήτορα*, ο οποίος είναι ένα συνεκτικό σύνολο ευθειών γραμμών και το οποίο σχηματίζει ένα μονοπάτι από την αρχή μέχρι το τέλος της γραμμής που αντικαθιστά. Τότε, κάθε ευθύγραμμο τμήμα του νέου σχήματος αντικαθίσταται από μια όμοια εκδοχή του γεννήτορα. Αυτή η διεργασία συνεχίζεται απεριόριστα. Για περισσότερα παραδείγματα τέτοιων καμπυλών ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στα [111], [112], [141] και [148]. Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί αμάλγαμα των [61] και [63].

6.1 Καμπύλες προερχόμενες από ΣΜΣΠ

Ας δώσουμε λοιπόν τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό.

Ορισμός 6.1.1 *Μια καμπύλη γεμίζουσα τον χώρο είναι μια συνεχής καμπύλη στον \mathbb{R}^2 , η οποία περνά δια μέσου κάθε σημείου του μοναδιαίου τετραγώνου $[0, 1] \times [0, 1]$.*

Έστω \mathcal{A} ένα μη κενό, κατά τόξα συνεκτικό, συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Θα δείξουμε, πως να κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ τέτοια, ώ-



στε $f([0,1]) = \mathcal{A}$, όπου $\mathcal{A} = [0,1] \times [0,1]$. Έστω $E_0 \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ και θεωρήστε την ακολουθία συνόλων $\{E_k = W^k(E_0)\}_{k=0}^\infty$, όπου η W ορίζεται από την (5.1). Από το Θεώρημα 5.1.1 έπεται ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει προς το \mathcal{A} ως προς τη μετρική Hausdorff. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται, σ' αυτήν την περίπτωση, για να υπολογίσει την γραφική παράσταση μιας καμπύλης γεμίζουσας το χώρο, ονομάζεται *Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών επαναλήψεων* και εφαρμόστηκε για την κατασκευή όλων των σχημάτων αυτής της ενότητας. Η μέθοδος παρουσιάζεται αναλυτικά στην Κατασκευή 1 της Ενότητας 7.1. Στα ακόλουθα παραδείγματα τα σημεία παρεμβολής σημειώνονται με μικρούς κύκλους όσον αφορά στον ενάρκτη και τον γεννήτορα.

Παράδειγμα 6.1.1 Ας λάβουμε $N = 4$ και το σύνολο των δεδομένων

$$\{(0,0), (0,0.5), (0.5,0.5), (1,0.5), (1,0)\}.$$

Οι απεικονίσεις w_n , $n = 1, 2, \dots, N$ είναι της μορφής (5.2) και επιλεγμένες έτσι, ώστε να ισχύει η (5.20). Θυμηθείτε ότι η μήτρα A πρέπει να είναι συστολή. Η επίλυση των (5.2) και (5.20) αποφέρει τις σταθερές a_n, c_n, d_n και e_n , ενώ για τις άλλες αναίρετες σταθερές θέτουμε $b_n = c_n$ και $s_n = a_n$ για $n = 1, 2, \dots, N$. Οι προκύπτουσες σταθερές δίνονται στον Πίνακα 6.1(α). Τότε έχουμε τις ακόλουθες τρεις υποπεριπτώσεις με τα αντίστοιχά τους σχήματα:

w	a	b	c	s	d	e
1	0	0.5	0.5	0	0	0
2	0.5	0	0	0.5	0	0.5
3	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5
4	0	-0.5	-0.5	0	1	0.5

(α)

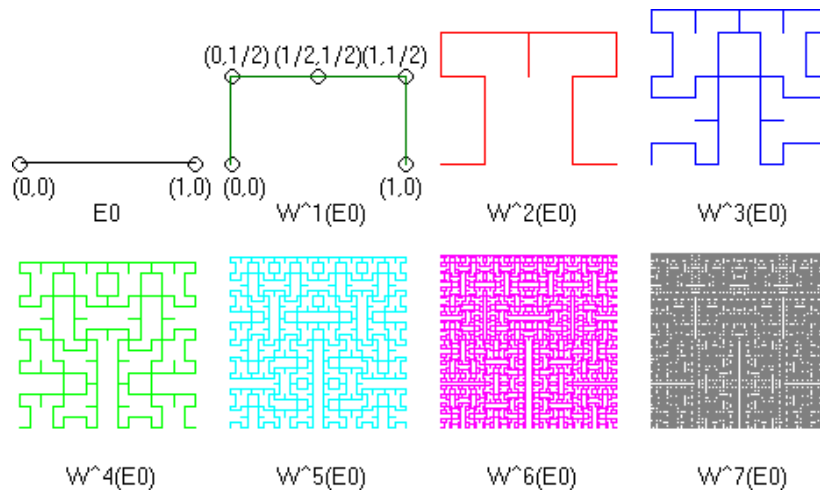
w	a	b	c	s	d	e
1	0	0.5	-0.5	0	0	0.5
2	-0.5	0	0	0.5	0.5	0.5
3	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5
4	0	-0.5	-0.5	0	1	0.5

(β)

Πίνακας 6.1: Ο κώδικας του ΕΣΣ για τις γεμίζουσες τον χώρο καμπύλες που κατασκευάστηκαν (α) στο Παράδειγμα 6.1.1 και (β) στο Παράδειγμα 6.1.2.

Το Σχήμα 6.1 επιτεύχθηκε θέτοντας ως ενάρκτη $E_0 \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ μια απλή καμπύλη, η οποία συνδέει το σημείο $(0,0)$ με το σημείο $(1,0)$. Εδώ παίρνουμε το E_0 να είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα τέτοιο, ώστε $E_0 \cap \partial\mathcal{A} = \{(x_0, f_0), (x_N, f_N)\}$. Αυτή η συνθήκη μας λέει ότι η καμπύλη κείται στο εσωτερικό του μοναδιαίου τετραγώνου, εκτός των δύο ακριανών σημείων της καμπύλης. Έτσι, η E_k είναι μια απλή καμπύλη για κάθε $k = 0, 1, \dots$, η οποία συνδέει το σημείο (x_0, f_0) με το σημείο (x_N, f_N) . Ο γεννήτορας σ' αυτήν την περίπτωση είναι το σύνολο E_1 .

Το Σχήμα 6.2 επιτεύχθηκε θέτοντας ως γεννήτορα $E_0 \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ πάλι μια απλή καμπύλη, η οποία συνδέει το σημείο $(0,0)$ με το σημείο $(1,0)$ και, συγκεκριμένα, αποτελείται από τις δύο πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου. Τελικώς, η E_k είναι επίσης μια απλή καμπύλη για κάθε $k = 0, 1, \dots$, η οποία συνδέει το σημείο (x_0, f_0)



Σχήμα 6.1: Μια ακολουθία συνόλων «συγκλίνουσα προς» μία γεμίζουσα τον χώρο καμπύλη.

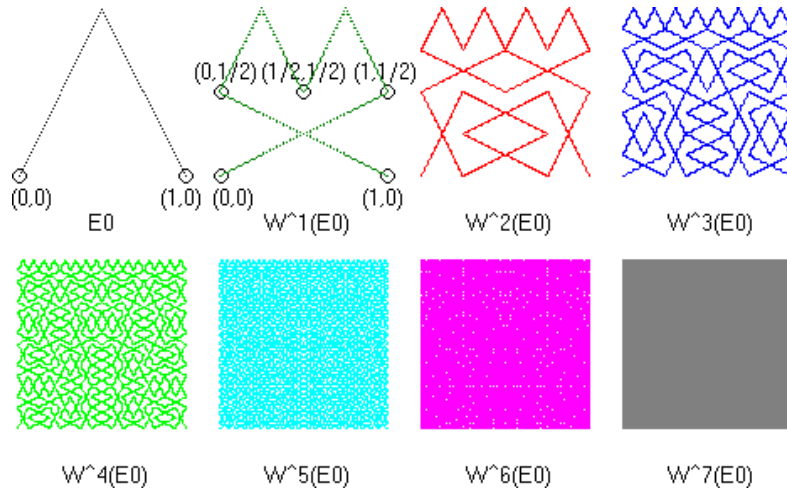
με το σημείο (x_N, f_N) . Ο ενάρκτης αυτής της περίπτωσης είναι ίδιος με αυτόν της προηγούμενης περίπτωσης.

Το Σχήμα 6.3 επιτεύχθηκε θέτοντας ως γεννήτορα $E_0 \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ μια καμπύλη, η οποία, αυτή τη φορά, συνδέει το σημείο $(0, 1/2)$ με το σημείο $(1, 1/2)$. Η καμπύλη αυτή είναι όμοια με το πρώτο στάδιο της τριγωνικής καμπύλης του Cesàro. Ο ενάρκτης σ' αυτήν την περίπτωση είναι πάλι το σύνολο E_0 του Σχήματος 6.1.

Παράδειγμα 6.1.2 Το παράδειγμα αυτό είναι η κατασκευή του Hilbert για την αυθεντική γεμίζουσα τον χώρο καμπύλη του Peano. Ποικιλοτρόπως είναι ένα αρχέτυπο που εκφράζει τα γενικά χαρακτηριστικά των καμπύλων Peano και τη σχέση τους με τα υπερβολικά ΕΣΣ. Ας λάβουμε $N = 4$ και το σύνολο των δεδομένων

$$\{(0, 0.25), (0.25, 0.25), (0.25, 0.75), (0.75, 0.75), (0.75, 0)\}.$$

Οι σταθερές a_n, b_n, c_n, s_n, d_n και e_n δίνονται στον Πίνακα 6.1(β). Ακολουθίες καμπύλων Hilbert εικονογραφούνται στο Σχήμα 6.4. Ας σημειώσουμε ότι ο γεννήτορας E_0 της καμπύλης έχει δύο επιπρόσθετα «πόδια» συγκρινόμενος με το συνήθη, το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0, 0.25)$ έως το $(0.25, 0.25)$ και το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0.75, 0.25)$ έως το $(0.75, 0)$. Αυτά εισήχθησαν ώστε να εξασφαλίσουν τη συνεκτικότητα του ελκυστή. Ο ενάρκτης σ' αυτήν την περίπτωση είναι πάλι το σύνολο E_0 του Σχήματος 6.1.



Σχήμα 6.2: Μια ακολουθία συνόλων «συγκλίνουσα προς» μία γεμίζουσα τον χώρο καμπύλη.

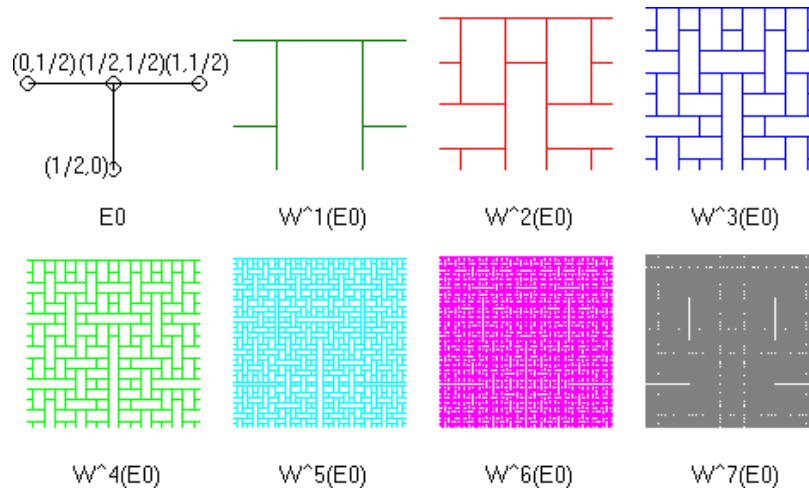
6.2 Καμπύλες προερχόμενες από κρυφής μεταβλητής ΣΜΣΠ

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.4.1, ώστε να κατασκευάσουμε μερικές καμπύλες που γεμίζουν το χώρο. Προσέξτε ότι τώρα απαιτούμε ισαπέχοντα σημεία x_0, x_1, \dots, x_N , με $x_0 = f_0 = H_0 = 0$, $x_N = f_N = 1$ και $H_N = 0$. Τότε ο ελκυστής του ΕΣΣ $\{\mathbb{R}^3; w_{1-N}\}$, όπου οι απεικονίσεις w_n , $n = 1, 2, \dots, N$ είναι οι συγγενείς μετασχηματισμοί

$$w_n \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/N & 0 & 0 \\ 0 & a_n & b_n \\ 0 & c_n & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (n-1)/N \\ d_n \\ e_n \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

είναι η γραφική παράσταση G μιας συνεχούς συνάρτησης $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ τέτοιας, ώστε $f([0, 1]) = \mathcal{A}$, όπου \mathcal{A} είναι ένα μη κενό κατά τόξα συνεκτικό συμπαγές σύνολο. Το πεδίο τιμών αυτής της συνάρτησης είναι η προβολή του G στο επίπεδο των (y, z) . Οι προβολές του G στα (x, y) και (x, z) είναι γραφικές παραστάσεις των μορφοκλασματικών συναρτήσεων κρυφής μεταβλητής. Η ευκολότερη μέθοδος για τον υπολογισμό του γραφήματος μιας κρυφής μεταβλητής ΜΣΠ, είναι ο *Αλγόριθμος των Τυχαίων Επαναλήψεων* ή *ATE* χάριν συντομίας.

Στον ATE υπολογίζουμε σε κάθε στάδιο μόνο ένα νέο σημείο x_{n+1} από τον προκάτοχο του x_n , μέσω της $x_{n+1} = w_i(x_n)$ με έναν τυχαίως επιλεγμένο δείκτη i από τους $1, 2, \dots, N$. Για περισσότερες πληροφορίες επί της μεθόδου παραπέμπουμε στα [15] ή [90]. Οι γενικές αρχές της σκιαγραφούνται στην Κατασκευή 2 της Ενότητας



Σχήμα 6.3: Μια ακολουθία συνόλων «συγκλίνουσα προς» μία γεμίζουσα τον χώρο καμπύλη.

7.1. Πρωτίστως υπολογίζουμε τους συντελεστές του τριδιάστατου συγγενούς μετασχηματισμού από τις Εξισώσεις (5.13) έως την (5.18), ενώ μετά εφαρμόζουμε τον ΑΤΕ στο προκύπτον ΕΣΣ. Τελικώς, σχεδιάζουμε κάθε σημείο με χρώμα τέτοιο που να εξαρτάται από την συντεταγμένη του z . Αυτό μας βοηθάει στην οπτικοποίηση του «κρυφού» τριδιάστατου χαρακτήρα της καμπύλης. Στα ακόλουθα παραδείγματα τα σημεία παρεμβολής σημειώνονται με μικρούς κύκλους.

w	a	b	c	s
1	0.25	0.375	0.5	-0.25
2	0.5	0	0	0.5
3	0.25	-0.375	-0.5	-0.25

(α)

w	a	b	c	s
1	0.5	0.5	0.5	-0.5
2	0.5	-0.5	-0.5	-0.5

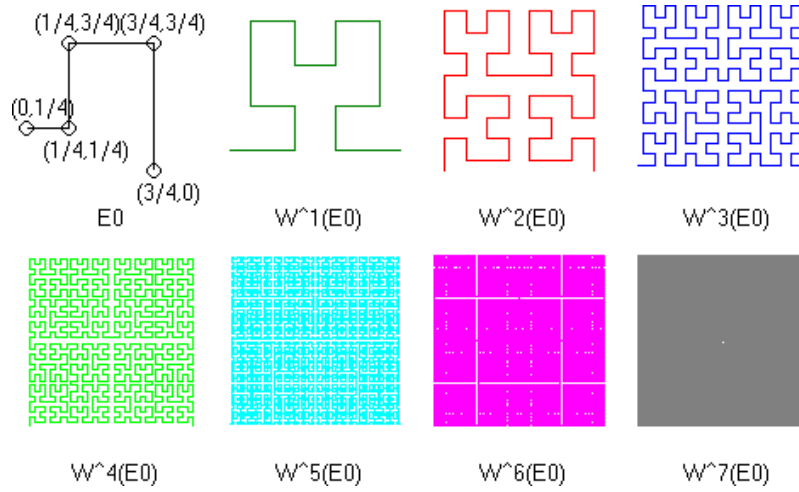
(β)

Πίνακας 6.2: Ο κώδικας του ΕΣΣ για τις γεμίζουσες τον χώρο καμπύλες που κατασκευάστηκαν (α) στο Παράδειγμα 6.2.1 και (β) στο Παράδειγμα 6.2.2.

Παράδειγμα 6.2.1 Ας λάβουμε $N = 3$ και το σύνολο των δεδομένων

$$\{(0, 0, 0), (0.33, 0.25, 0.5), (0.66, 0.75, 0.5), (1, 1, 0)\}.$$

Οι απεικονίσεις $w_n, n = 1, 2, \dots, N$ είναι της μορφής (6.1) και επιλεγμένες έτσι, ώστε να ισχύει η (5.20). Η επίλυση των (6.1) και (5.20) αποφέρει τις σταθερές a_n, c_n, d_n και e_n . Για τον καθορισμό των υπόλοιπων σταθερών απαιτούμε να ισχύουν

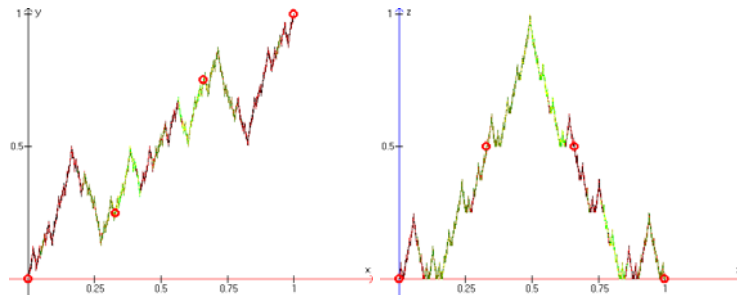


Σχήμα 6.4: Μια ακολουθία καμπύλων Hilbert.

επίσης οι ακόλουθες συνθήκες:

$$w_1 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/6 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Οι προκύπτουσες σταθερές δίνονται στον Πίνακα 6.2(α). Διάφορες απόψεις του ελκυστή G για το ως άνω ορισθέν ΕΣΣ εικονογραφούνται στα Σχήματα 6.5 και 6.6. Παρατηρούμε ότι το G είναι ένα τρίγωνο Sierpiński, όταν ιδωθεί από το επίπεδο

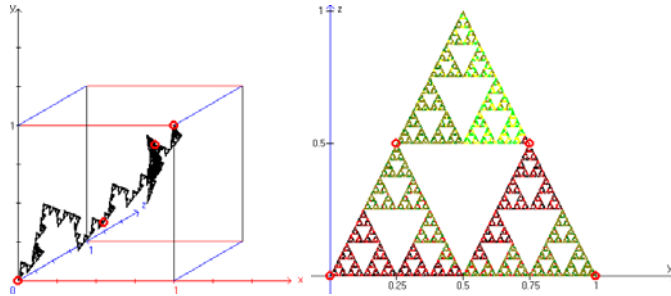


Σχήμα 6.5: Δύο ορθογώνιες προβολές του ελκυστή για το ΕΣΣ του Παραδείγματος 6.2.1.

των yz .

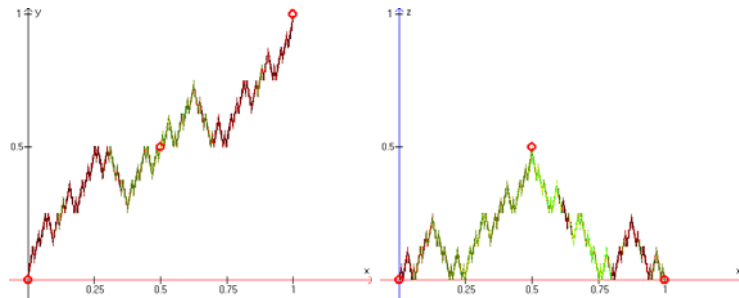
Παράδειγμα 6.2.2 Ας λάβουμε $N = 2$ και το σύνολο των δεδομένων

$$\{(0, 0, 0), (0.5, 0.5, 0.5), (1, 1, 0)\}.$$



Σχήμα 6.6: Cabinet και ορθογώνια προβολή του ελκυστή για το ΕΣΣ του Παραδείγματος 6.2.1.

Η επίλυση των (6.1) και (5.20) επιφέρει τις σταθερές a_n, c_n, d_n και e_n , ενώ για τις άλλες σταθερές θέτουμε $b_n = c_n$ και $s_n = -a_n$ για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$. Οι προκύπτουσες σταθερές δίνονται στον Πίνακα 6.2(β). Διάφορες απόψεις του ελκυστή G για το ως άνω ορισθέν ΕΣΣ εικονογραφούνται στα Σχήματα 6.7 και 6.8. Παρατηρούμε ότι το G είναι μια καμπύλη Peano, όταν ιδωθεί από το επίπεδο των



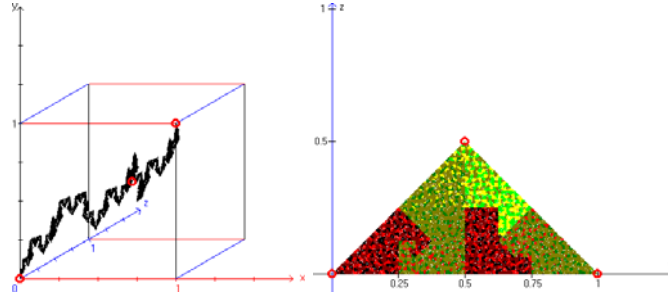
Σχήμα 6.7: Δύο ορθογώνιες προβολές του ελκυστή για το ΕΣΣ του Παραδείγματος 6.2.2.

yz .

Παράδειγμα 6.2.3 Ας λάβουμε $N = 4$ και το σύνολο των δεδομένων

$$\{(0, 0, 0), (0.25, 0.33, 0), (0.5, 0.5, 0.43), (0.75, 0.66, 0), (1, 1, 0)\}.$$

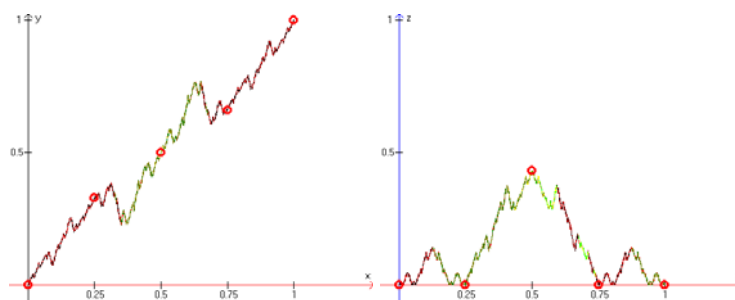
Η επίλυση των (6.1) και (5.20) επιφέρει τις σταθερές a_n, c_n, d_n και e_n , ενώ για τις άλλες σταθερές θέτουμε $b_n = -c_n$ και $s_n = a_n$ για κάθε $n = 1, 2, \dots, N$. Οι προκύπτουσες σταθερές δίνονται στον Πίνακα 6.3. Διάφορες απόψεις του ελκυστή G για το ως άνω ορισθέν ΕΣΣ εικονογραφούνται στα Σχήματα 6.9 και 6.10. Παρατηρούμε ότι το G είναι μια καμπύλη Koch όταν ιδωθεί από το επίπεδο των yz .



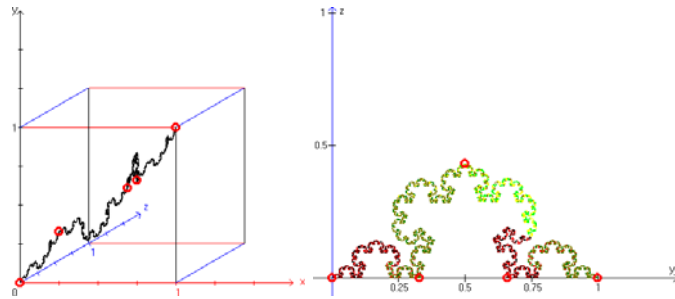
Σχήμα 6.8: Cabinet και ορθογώνια προβολή του ελκυστή για το ΕΣΣ του Παραδείγματος 6.2.2.

w	a	b	c	s
1	0.33	0	0	0.33
2	0.16	-0.433	0.433	0.16
3	0.16	0.433	-0.433	0.16
4	0.33	0	0	0.33

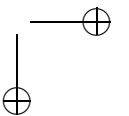
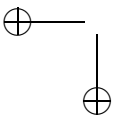
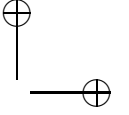
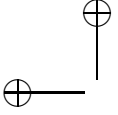
Πίνακας 6.3: Ο κώδικας του ΕΣΣ για τη γεμίζουσα τον χώρο καμπύλη που κατασκευάστηκε στο Παράδειγμα 6.2.3.

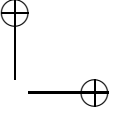
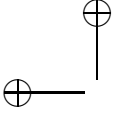


Σχήμα 6.9: Δύο ορθογώνιες προβολές του ελκυστή για το ΕΣΣ του Παραδείγματος 6.2.3.



Σχήμα 6.10: Cabinet και ορθογώνια προβολή του ελκυστή για το ΕΣΣ του Παραδείγματος 6.2.3.





Κεφάλαιο 7

Αλγόριθμοι κατασκευής μορφοκλασματικών συνόλων

7.1 Κατασκευή των ΕΣΣ

Για ευκολία περιοριζόμαστε στο υπερβολικό ΕΣΣ της μορφής $\{X; w_{1-N}\}$, όπου $X = \mathbb{R}^2$ και κάθε απεικόνιση είναι ένας συγγενής μετασχηματισμός.

Κατασκευή 1. Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων

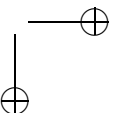
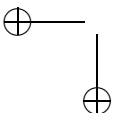
Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην ιδέα του άμεσου υπολογισμού μίας ακολουθίας συνόλων $\{A_n = W^n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ ξεκινώντας από ένα συμπαγές αρχικό σύνολο A_0 . Επιλέγουμε ένα συμπαγές σύνολο $A_0 \subset \mathbb{R}^2$. Τότε υπολογίζουμε επανειλημμένως τα σύνολα $A_n = W^n(A_0)$ σύμφωνα με τη σχέση

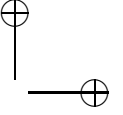
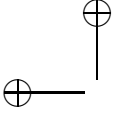
$$A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^N w_j(A_n)$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$. Έτσι κατασκευάζουμε μία ακολουθία $\{A_n : n = 0, 1, 2, \dots\} \subset \mathcal{H}(X)$, η οποία, συμφώνως προς το Θεώρημα 5.1.1, συγκλίνει προς τον ελκυστή του ΕΣΣ ως προς τη μετρική Hausdorff.

Κατά την υλοποίηση της μεθόδου εφαρμόζουμε σε κάθε σημείο του αρχικού μας σχήματος καθ' έναν από τους συγγενείς μετασχηματισμούς του ΕΣΣ μας. Τα νέα σημεία σχεδιάζονται και η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται ξανά, έως ότου επιτύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Με λίγα λόγια απαιτείται από εμάς να υπολογίζουμε σε κάθε στάδιο την αλληλοεπικάλυψη των εικόνων $w_1(E) \cup \dots \cup w_N(E)$ απ' το προηγούμενο στάδιο E .

Σε αυτό το σημείο πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ένα σημαντικό μειονέκτημα του αιτιοκρατικού αλγορίθμου. Πρέπει να έχουμε αρκετή διαθέσιμη μνήμη. Μόνο ο





καθορισμός όλων των σημείων στην τρέχουσα οθόνη μας απαιτεί 224K θέσεων μνήμης και ένα ίσο πλήθος θέσεων για αποθήκευση των μετασχηματιζόμενων σημείων καθώς αυτά παράγονται.

Κατασκευή 2. Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων.

Αντιθέτως προς την προηγούμενη μέθοδο, εδώ υπολογίζουμε σε κάθε στάδιο μόνο ένα καινούργιο σημείο x_{n+1} απ' τον προκάτοχό του x_n , μέσω της $x_{n+1} = w_i(x_n)$ με ένα i τυχαίως επιλεγμένο από τα $1, 2, \dots, N$.

Ορισμός 7.1.1 (Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων) Δοθέντος του ΕΣΣ $\{X; w_{1-N}\}$ αντιστοιχούμε πρώτα με κάθε w_i μία πιθανότητα $p_i = D_i/D$, η οποία υπολογίζεται απ' τους συντελεστές a_i έως s_i της απεικόνισης w_i μέσω των $D_i = |a_i s_i - b_i c_i|$ και $D = D_1 + \dots + D_N$, όπου D_i είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα της w_i .

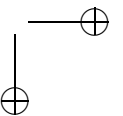
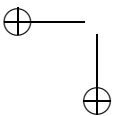
Επανάληψη. Επιλέγουμε ένα αρχικό σημείο $x_0 \in X$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα διαδοχικά σημεία $x_{n+1} = w_r(x_n)$, όπου σε κάθε στάδιο το r λαμβάνει μία από τις τιμές $1, 2, \dots, N$ συμφώνως προς τον κανόνα: η πιθανότητα του $\{r = i\}$ είναι p_i . Δαισθητικώς, διατρέχουμε τις επιλογές έτσι, ώστε κάθε w_i να εμφανίζεται με μία συχνότητα ανάλογη προς το εμβαδόν D_i της εικόνας, υπό την w_i , ενός τετραγώνου με μοναδιαίο εμβαδόν. Έτσι οι μετασχηματισμοί που είναι υπεύθυνοι για την παραγωγή του μεγαλύτερου εμβαδού, παρέχουν και τα περισσότερα σημεία.

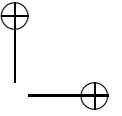
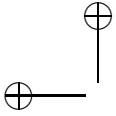
Γιατί πρέπει να λειτουργεί;

Πρόβλημα 1 Ξεκινώντας. Δεν μας εγγυάται κανείς ότι το αρχικό σημείο x_0 βρίσκεται στον ελκυστή \mathcal{A} . Πάρα ταύτα, συμπεραίνουμε από προηγούμενα αποτελέσματα ότι δοθείσης μίας μικρής ανοχής ε , έστω ένα δέκατο της διαμέτρου του εικονοστοιχείου, όλες οι επαναλήψεις x_n θα βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από ε κοντά στα σημεία του ελκυστή μετά από κάποιο στάδιο k .

Πρόβλημα 2 Ανακρίβεια. Τι γίνεται με τα αθροιστικά σφάλματα κατά τον υπολογισμό μίας τροχιάς; Ευτυχώς η κατασκευή είναι αυτοδιορθωτική με την έννοια ότι οιοδήποτε ανακριβές σημείο x_m και να πάρουμε σε κάποιο ενδιάμεσο στάδιο της μεθόδου, παραμένει αληθές ότι $W^n(E_0) \rightarrow \mathcal{A}$, αν E_0 είναι το απλό σημείο x_m . Επίσης, αν x_{n+1} είναι υπολογισμένο ακριβώς από ένα πιθανώς αλάνθαστο x_n , τότε είναι πιά κοντά στον \mathcal{A} απ' ότι το x_n , διότι αν $a \in \mathcal{A}$ και $w_i(a) = b$, τότε $\rho(x_{n+1}, b) = \rho(w_i(x_n), w_i(a)) \leq r_i \rho(x_n, a)$.

Πρόβλημα 3 Κατανομή. Δεδομένου ότι τα εικονοστοιχεία που εμφανίζουμε είναι αρκετά κοντά προς το σωστό, όλοι μας οι στιγματισμοί συγκεντρώνονται σε





διάφορα μέρη του ελκυστή ή αναλύσκονται στο να επισκέπτονται το ίδιο μέρος ξανά και ξανά; Άρα εμφανίζεται μόνο ένα μέρος του ελκυστή; Αυτή η ερώτηση είναι αποφασιστικής σημασίας. Υπάρχουν δύο απαντήσεις. Μία πρώτη βασίζεται στη θεωρία μέτρου και έχει συναρπαστικά αποτελέσματα (βλ. [18]). Η δεύτερη και κάπως έμμεση, διότι βασίζεται στη συμβολική δυναμική, είναι ότι τα περιοδικά σημεία είναι πυκνά στον ελκυστή.

7.2 Κατασκευή των συνόλων Julia

Χρησιμοποιούμε την ορολογία των [130] και [129] για τις διάφορες μεθόδους κατασκευής των συνόλων. Η Κατασκευή 1 της Ενότητας 7.2 είναι ειδικά σχεδιασμένη για την οικογένεια (3.1). Η τιμή της σταθεράς c για όλες τις εικόνες των συνόλων Julia είναι $c = -0.74543 + 0.11301i$, ώστε να μπορέσουμε να συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα των μεθόδων σε αυτή τη «δύσκολη» τιμή.

Κατασκευή 1. Μέθοδος Αντιστρόφων Επαναλήψεων.

Επαναλαμβάνουμε όπισθεν ξεκινώντας από ένα σημείο ζ του συνόλου Julia.

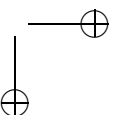
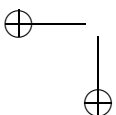
- (α) Υπολογίζουμε τα σταθερά σημεία του $p_c(z) = z^2 + c$ και παίρνουμε εκείνο το ζ με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη του $1/2$. Τέτοιο σημείο υπάρχει, εκτός αν το $c = 1/4$, οπότε παίρνουμε $\zeta = 1/2$. Εναλλακτικώς, ξεκινάμε με οιοδήποτε σημείο (εκτός του 0 αν $c = 0$) και βασιζόμαστε στο στιγματισμό διαφόρων σημείων μεταξύ των λίγων αρχικών που παράγονται απ' την επανάληψη.
- (β) Επαναλαμβάνουμε όπισθεν: Για κάθε σημείο ζ_i που υπολογίσαμε, αποκτούμε καινούργια ως ρίζες της $p_c(z) = \zeta_i$. Υπολογίζουμε ανά επίπεδο, όπου σημεία του επιπέδου k είναι εκείνα που υπολογίσθηκαν επιλύοντας k εξισώσεις. Σταματάμε, όποτε η εικόνα γίνει ικανοποιητική ή μετά από εύλογο χρόνο (Σχήμα 7.1(α)).

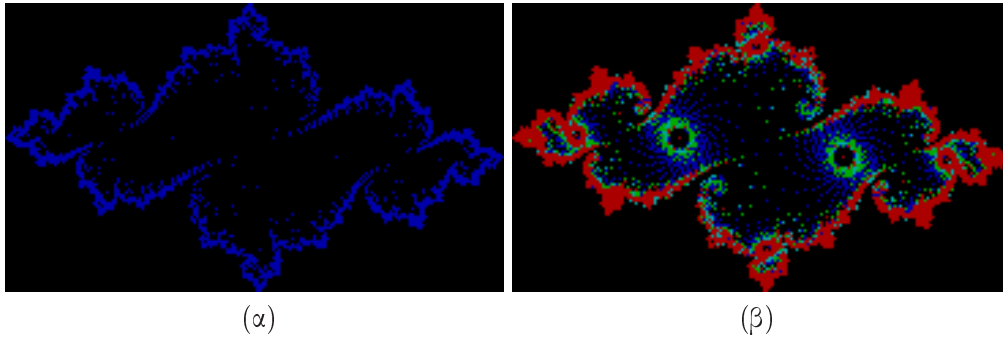
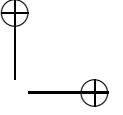
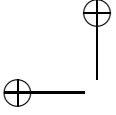
Βάση της μεθόδου. Η ιδέα είναι ότι, αν το $\zeta \in J$, κάθε σημείο του J έχει κάποια επανειλημμένη αντίστροφη εικόνα του ζ αρκετά κοντά (Πόρισμα 2.3.2).

(α) Το Παράδειγμα 3.4.1 δείχνει ότι ένα από τα σταθερά σημεία της $p_c(z) = z^2 + c$ είναι απωστικό και επομένως, λόγω του Θεωρήματος 2.4.3, βρίσκεται στο J , εκτός εάν $c = 1/4$. Ένα διαφορετικό επιχείρημα δείχνει ότι, σ' αυτήν την περίπτωση, η διπλή ρίζα $1/2$ της $p_c(z) = z$ βρίσκεται στο J . Για τα περισσότερα σημεία εκκίνησης εμφανίζεται σύγκλιση προς το J , επειδή η μέθοδος ισοδυναμεί με τη χρήση ενός ΕΣΣ με απεικονίσεις

$$w_1(z) = \sqrt{z - c}, \quad w_2(z) = -\sqrt{z - c},$$

όπου κάθε σύνολο σημείων A έως εδώ υπολογισμένο, αποφέρει ένα μεγαλύτερο σύνολο $w_1(A) \cup w_2(A)$. Όσον αφορά στην απαιτούμενη ιδιότητα συστολής σημειώστε ότι η w_1 είναι η σύνθεση μίας μετατόπισης $z \mapsto z - c$ με μία απεικόνιση





Σχήμα 7.1: Το ίδιο σύνολο Julia χρησιμοποιώντας (α) την MAE και (β) την TMEA.

$re^{i\theta} \mapsto (\sqrt{r})e^{i\theta/2}$, έτσι η w_1 είναι ασφαλώς συστολή οποτεδήποτε $r = |z - c| > 1$. Στο [15] εξετάζεται λεπτομερώς αυτή η άποψη.

(β) Μετά από k βήματα της MAE έχουμε 2^k αντίστροφες εικόνες. Αυτό το πλήθος γρήγορα γίνεται πολύ μεγάλο καθώς το k αυξάνεται και ένα πρόβλημα της μεθόδου είναι ότι κάποια μέρη του J τα επισκεπτόμαστε συχνώς και άλλα σπανίως έχοντας ως αποτέλεσμα μία ανομοιόμορφη εικόνα. Προς αποφυγή τούτου, μία τροποποιημένη MAE (TMAE) προσθέτει τα εξής:

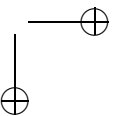
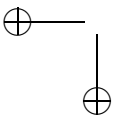
Διαιρέστε τον εν λόγω τόπο σε ένα πλέγμα μικρών τετραγώνων. Μην επαναλάβετε περισσότερα σημεία από ένα τετράγωνο μόλις αυτό δεχθεί ένα προκαθορισμένο πλήθος επισκέψεων, έστω 10 φορές (Σχήμα 7.1(β)).

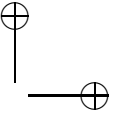
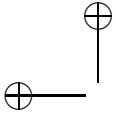
Κατασκευή 2. Μέθοδος Ανίχνευσης του Συνόρου.

Ξεκινάμε με ένα πλέγμα μικρών τετραγώνων (όπως και προηγουμένως, μπορούν να είναι εικονοστοιχεία της οθόνης). Επιλέγουμε μία μεγάλη απόσταση R και ένα πλήθος επαναλήψεων N . Κινούμαστε δια μέσου των κορυφών των τετραγώνων γραμμή γραμμή, σημαδεύοντας ένα σημείο v ως τύπου ∞ , αν $|f^k(v)| > R$ για κάποιο $k \leq N$, και ως τύπου 0 διαφορετικώς. Τώρα σκιαστείτε κάθε τετράγωνο που έχει κορυφές και των δύο τύπων.

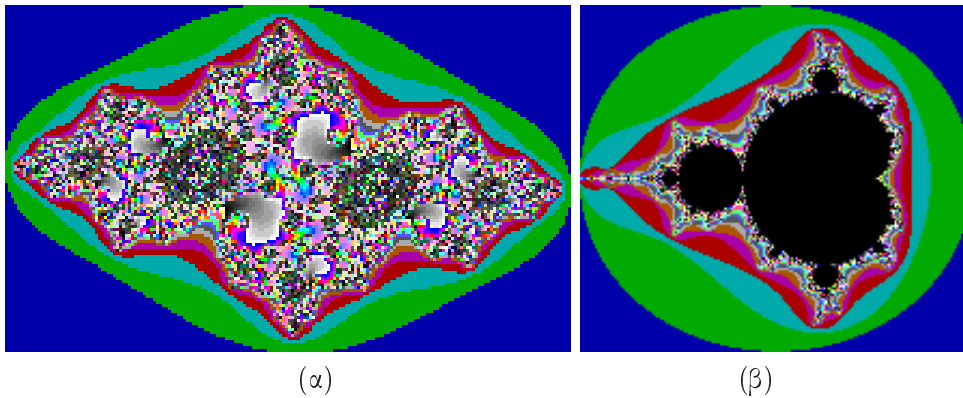
Βάση της μεθόδου. Έχουμε ότι $J = \partial A(\infty) = \partial K$, όπου $K = \mathbb{C} \setminus A(\infty)$ είναι το γεμισμένο σύνολο Julia. Λαμβάνοντας ως μία προσέγγιση την $|f^k(v)| > R$ (για κάποιο $k \leq N$) έχουμε ότι $v \in A(\infty)$, διαφορετικώς $v \in K$. Έτσι παίρνουμε ένα τετράγωνο που έχει δύο ειδών κορυφές και ανήκει στο κοινό σύνορο J των $A(\infty)$ και K .

Κατασκευή 3. Μέθοδος Συνόλων Στάθμης.





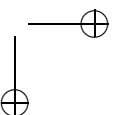
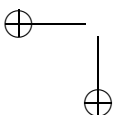
Ονομάζεται επίσης και *Μέθοδος των Χρόνων Διαφυγής* και κάνει το J να ξεχωρίζει μέσα σ' ένα φάσμα χρωματικών στεφανιών (ή κορώνων), προσεγγίζοντάς το εκ των έσω ή έξωθεν. Πρωτίστως διαιρούμε τον εν λόγω τόπο σε ένα πλέγμα μικρών τετραγώνων, π.χ. εικονοστοιχεία της οθόνης, τοποθετώντας ένα αντιπροσωπευτικό σημείο v μέσα σε κάθε τετράγωνο (έστω στο κέντρο). Επιλέγουμε ένα πλήθος επαναλήψεων N (έστω 100) και αριθμούμε τα χρώματα που θα χρησιμοποιήσουμε από το 1 έως το N , ει δυνατόν περιοδικώς. Για παράδειγμα παραχωρούμε τις επαναλήψεις 1–10 σε ένα χρώμα, τις 11–20 σε άλλο κ.ο.κ.



Σχήμα 7.2: (α) Ένα σύνολο Julia και (β) το σύνολο Mandelbrot χρησιμοποιώντας τη ΜΣΣ.

- (Α) *Προσέγγιση του J έξωθεν.* Επιλέγουμε μία μεγάλη ακτίνα R . Αν το $f^N(v)$ βρίσκεται εντός του δίσκου $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, χρωματίζουμε το αντίστοιχο τετράγωνο μαύρο («καμμία διαφυγή»), αλλιώς, αν το $f^k(v)$ είναι η πρώτη διαφορεύγουσα επανειλημμένη εικόνα, δίνουμε το χρώμα k σ' αυτό το τετράγωνο (Σχήμα 7.2(α)).
- (Β) *Προσέγγιση του J έσωθεν.* Αυτό απαιτεί ένα ελκυστικό σταθερό σημείο a . Επιλέγουμε έναν μικρό αριθμό ε . Έστω ότι $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$. Αν το $f^N(v)$ βρίσκεται εκτός του D , χρωματίζουμε το σημείο v μαύρο, διαφορετικώς, αν $f^k(v)$ είναι η πρώτη επανειλημμένη εικόνα που εισέρχεται στο D , δίνουμε το χρώμα k στο αντίστοιχο τετράγωνο.

Βάση της μεθόδου. Η προηγούμενη προσέγγιση (Α) βασίζεται στο ότι $J = \partial A(\infty)$ και η (Β) στο ότι $J = \partial A(a)$ για κάποιο ελκυστικό σταθερό σημείο a . Έτσι η ΜΣΣ μπορεί να θεωρηθεί ως μία διαφορετική μορφή της ΜΑΣ. Σίγουρα η ΜΣΣ



είναι πιο ισχυρή. Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι οι δύο προσεγγίσεις έχουν κοινό το ότι μετρούμε το πλήθος $k(v, T)$ των, εφαρμοζόμενων σ' ένα σημείο v , επαναλήψεων, ώστε να εισέλθουμε σε ένα σύνολο στόχος T . Οι περιπτώσεις (A), (B) έχουν αντίστοιχα σύνολα στόχους $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ και $T = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$. Είναι διαισθητικώς χρήσιμο να ονομάσουμε $k(v, T)$ το χρόνο διαφυγής του v . Το σύνολο της k στάθμης αποτελείται από εκείνα τα σημεία με χρόνο διαφυγής k , χρωματισμένο με το ίδιο χρώμα. Αυτή η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί όχι μόνο προς το σύνολο Mandelbrot, αλλά και σε μία πλειάδα ρητών απεικονίσεων και συνόλων στόχων, συμπεριλαμβανομένης και κάποιας προσέγγισης προς τις τοιχογραφίες τύπου Escher (βλ. [130]). Είναι μερικές φορές χρήσιμο να τυποποιούμε κατά κάποιο τρόπο περισσότερο καθορίζοντας ένα πηγαιό σύνολο για τα σημεία που θα επαναλαμβάνονται, όπως το $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ για το σύνολο \mathcal{M} .

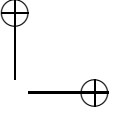
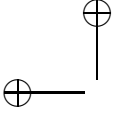
Η περίπτωση των επαναληπτικών μεθόδων.

Δοθείσης μιας συνάρτησης $f_n(z) = z^n - 1$ και μιας ρητής απεικόνισης R , κάθε σημείο του πλέγματος χρησιμοποιείται ως αρχική τιμή, z_0 , της ακολουθίας $z_{k+1} = R(z_k)$. Μετά από κάθε επανάληψη υπολογίζουμε τις αποστάσεις μεταξύ της επανάληψης z_k και καθεμίας εκ των ριζών z_i^* της $f_n(z) = 0$. Αν οιαδήποτε από τις αποστάσεις βρεθεί μικρότερη του 0.0001, υποθέτουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει προς την αντίστοιχη ρίζα z_i^* . Στο εικονοστοιχείο που αντιστοιχεί το αυθεντικό σημείο του πλέγματος z_0 δίνεται ένα συγκεκριμένο χρώμα, σύμφωνα με τη ρίζα προς την οποία συγκλίνει. Κατ' αυτόν τον τρόπο στη λεκάνη έλξης, $A(z_i^*)$, κάθε ρίζας της μονάδας, z_i^* , δίνεται ένα χαρακτηριστικό χρώμα. Αν $n = 2$, οι γαλάζιες περιοχές απαρτίζουν την $A(1)$ και οι κίτρινες περιοχές την $A(-1)$. Αν $n = 3$, οι γαλάζιες περιοχές απαρτίζουν την $A(1)$, οι κίτρινες περιοχές την $A(-0.5 + i0.5\sqrt{3})$ και οι πράσινες περιοχές την $A(-0.5 - i0.5\sqrt{3})$. Αν $n = 4$, οι γαλάζιες περιοχές απαρτίζουν την $A(1)$, οι κίτρινες περιοχές την $A(i)$, οι πράσινες περιοχές την $A(-1)$ και οι κόκκινες περιοχές την $A(-i)$. Τα κοινά σύνορα αυτών των λεκανών έλξης αποτελούν το σύνολο Julia $J(R)$. Αν έπειτα από 200 επαναλήψεις δεν παρατηρηθεί τέτοιου είδους σύγκλιση, η διαδικασία μεταπηδά στο αμέσως επόμενο σημείο του πλέγματος.

Ακόμα κι αν γνωρίζουμε λίγα σχετικά με ηλεκτροστατική, ας δεχθούμε ότι αν ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος D δίνει ένα ηλεκτρικό φορτίο ομοιομόρφως κατανεμημένο, τότε μία επονομαζόμενη συνάρτηση δυναμικού $\phi(x, y)$ είναι σταθερή σε οιοδήποτε ομόκεντρο κύκλο C εκτός του D .

Κατασκευή 4. Μέθοδος Συνεχούς Δυναμικού.

Είναι ανάλογη της ΜΣΣ, αλλά χρησιμοποιεί μία συνάρτηση δυναμικού αντί για χρόνους διαφυγής. Το δυναμικό του $K_c = K(p_c)$ αναπαρίσταται ως μία λεία παραμετρική επιφάνεια $pot_c: \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, η οποία δίνεται απ' τη γραφική παράσταση



της

$$g_c(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |z_k|}{2^k}, \quad (7.1)$$

$z_k = z_{k-1}^2 + c$, $k = 1, 2, \dots$, και δίνεται προσεγγιστικώς απ' την

$$pot_c(z_0) = \left(z_0, \frac{\log(|z_n|)}{2^n} \right),$$

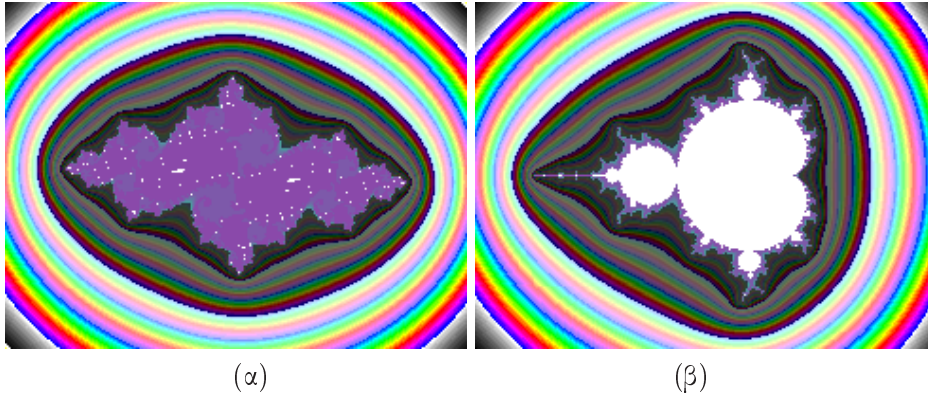
όπου

$$z_k = z_{k-1}^2 + c, k = 1, 2, \dots, n, \quad n = k(z_0, T)$$

και

$$T = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1/\varepsilon\}$$

για αρκετά μικρό ε (Σχήμα 7.3(α)).



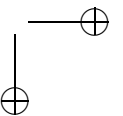
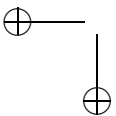
Σχήμα 7.3: (α) Ένα σύνολο Julia και (β) το σύνολο Mandelbrot χρησιμοποιώντας την ΜΣΔ.

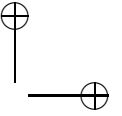
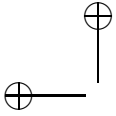
7.3 Κατασκευή των συνόλων τύπου Mandelbrot

Κατασκευή 1. Μέθοδος Συνόλου Στάθμης.

Ο αλγόριθμος αυτός είναι ακριβώς ανάλογος της ΜΣΣ για το σύνολο J . Σταθεροποιούμε ένα τετραγωνικό πλέγμα εικονοστοιχείων, επιλέγουμε έναν μεγάλο ακέραιο N_{\max} (ευκρίνεια επανάληψης) και ένα αυθαίρετο σύνολο T (σύνολο στόχος) που περιέχει το ∞ έτσι, ώστε $\mathcal{M} \subset \mathbb{C} \setminus T$. Τότε (βλ. Σχήμα 7.2(β))

$$k(c, T) = \begin{cases} k, & \text{αν } f_c^i(0) \notin T \text{ και } f_c^k(0) \in T \text{ για } 0 \leq i < k \text{ και } 1 \leq k \leq N_{\max} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$





Η περίπτωση των παραμετρικών χώρων.

Ένα χωρίο του μιγαδικού επιπέδου, έστω των λ , αναπαρίσταται από ένα τετραγωνικό πλέγμα που αντιστοιχεί στα εικονοστοιχεία μιας οθόνης. Για κάθε σημείο $\lambda = (\text{Re}(\lambda), \text{Im}(\lambda))$ υπολογίζεται ένα ελεύθερο κρίσιμο σημείο c_i και χρησιμοποιείται ως αρχική τιμή, z_0 , της επαναληπτικής ακολουθίας $z_{k+1} = R(z_k)$, όπου R είναι η ρητή επαναληπτική μέθοδος. Μετά από κάθε επανάληψη υπολογίζονται οι αποστάσεις μεταξύ της επανάληψης z_k και καθεμιάς εκ των ριζών, z_i^* , της p_λ . Αν οιαδήποτε από τις αποστάσεις βρεθεί μικρότερη του 0.0001, υποθέτουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει προς την αντίστοιχη ρίζα z_i^* και το σημείο του πλέγματος στον παραμετρικό χώρο χρωματίζεται αντιστοίχως: Στην περίπτωση των τριτοβαθμίων πολυωνύμων, γαλάζιο για σύγκλιση προς την z_1^* , κόκκινο για σύγκλιση προς την z_2^* και πράσινο για σύγκλιση προς την z_3^* . Στην περίπτωση των τεταρτοβαθμίων πολυωνύμων, γαλάζιο για σύγκλιση προς την z_1^* , κίτρινο για σύγκλιση προς την z_2^* , κόκκινο για σύγκλιση προς την z_3^* και πράσινο για σύγκλιση προς την z_4^* . Αν έπειτα από 200 επαναλήψεις δεν παρατηρηθεί τέτοιου είδους σύγκλιση, το σημείο του πλέγματος αφήνεται μαύρο.

Κατασκευή 2. Μέθοδος Συνεχούς Δυναμικού.

Ο αλγόριθμος αυτός είναι ακριβώς ανάλογος της ΜΣΔ για το σύνολο J , διότι χρησιμοποιούμε την Εξ. (7.1) για μια λεία παραμετρική επιφάνεια $Pot_c: \mathbb{C} \setminus \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ του δυναμικού που δίνεται από τη γραφική παράσταση της g_c και δίνεται προσεγγιστικώς από την

$$Pot(c) = \left(c, \frac{\log(|z_n|)}{2^n} \right),$$

όπου

$$z_k = z_{k-1}^2 + c, z_0 = c, k = 1, 2, \dots, n, \quad n = k(c, T)$$

και

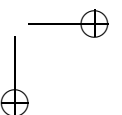
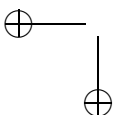
$$T = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1/\varepsilon\}, \quad \text{για κάποιο μικρό } \varepsilon \text{ (Σχήμα 7.3(β)).}$$

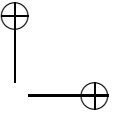
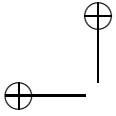
Κατασκευή 3. Μέθοδος Εκτιμητή της Απόστασης.

(α) Άλλη μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα οφείλεται στους Milnor και Thurston. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση δυναμικού $G(c) = \ln |\Phi(c)|$ μπορεί να δείξει κανείς ότι για κάποιο $c \notin \mathcal{M}$, η απόσταση $d(c, \mathcal{M})$ του c απ' το σύνορο του \mathcal{M} μπορεί να εκτιμηθεί ως

$$\frac{\sinh(G(c))}{2e^{G(c)}|G'(c)|} < d(c, \mathcal{M}) < \frac{2 \sinh(G(c))}{|G'(c)|}. \quad (7.2)$$

Μια λογική και πρακτική προσέγγιση του δεξιού σκέλους της Εξ. (7.2) επιτυγχάνεται κατά τον ακόλουθο τρόπο: Για c κοντά στο \mathcal{M} έχουμε ότι η $G(c)$ είναι κοντά στο 0,





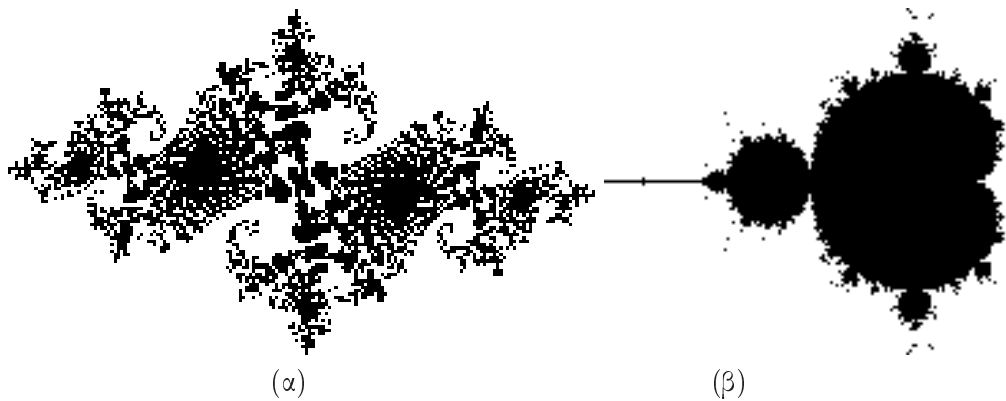
άρα μπορούμε να προσεγγίσουμε το $\sinh(G(c))$ από την $G(c)$. Για να προσεγγίσουμε τις $G(c)$ και $|G'(c)|$ χρησιμοποιούμε την Εξ. (7.1) και τις διαφορικές εξισώσεις των Cauchy–Riemann, επομένως

$$\frac{\sinh G(c)}{|G'(c)|} \approx \frac{|z_n|}{|z'_n|} \log |z_n|,$$

όπου

$$z'_n = \frac{dz_n}{dc}.$$

Η εκτίμηση της απόστασης για σημεία c κοντά στο σύνολο Mandelbrot (Σχήμα



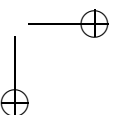
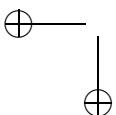
Σχήμα 7.4: (α) Ένα σύνολο Julia και (β) το σύνολο Mandelbrot χρησιμοποιώντας την MEA.

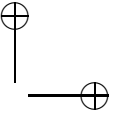
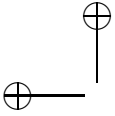
7.4(β)) εφαρμόζεται επίσης και για z κοντά στο K_c (συνεκτικό). Παρ' όλο που επιτυγχάνουμε καλύτερα αποτελέσματα με συνεκτικά σύνολα, χρησιμοποιήσαμε επιτυχώς τη μέθοδο και για σύνολα τύπου Cantor, όπως αυτό του Σχήματος 7.4(α).

(β) Ο Fisher στο [130] χρησιμοποιεί το κάτω φράγμα της Εξ. (7.2) ως εκτιμήτρια για την απόσταση ενός σημείου εκτός συνόλου από το \mathcal{M} (ή από κάποιο συνεκτικό J) και έτσι γεμίζει δίσκο δίσκο τον τόπο εκτός αυτού. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργεί το σύνολο του συνόλου \mathcal{M} . Για να γεμίσει το εσωτερικό του \mathcal{M} , χρησιμοποιεί μια παρόμοια εκτίμηση για ένα σημείο c εντός του συνόλου.

7.4 Ο κόσμος είναι στρογγυλός, όχι επίπεδος

Όπως είδαμε, η θεωρία των Julia και Fatou ισχύει στο μιγαδικό επίπεδο, όπως και στη σφαίρα Riemann με ελάχιστες τροποποιήσεις. Ο τελευταίος χώρος φαίνεται ως μια πιο φυσική προσέγγιση για τη μελέτη των ρητών συναρτήσεων. Γι' αυτό το λόγο επεκτείναμε τη μελέτη των απεικονίσεων Schröder, König και Laguerre





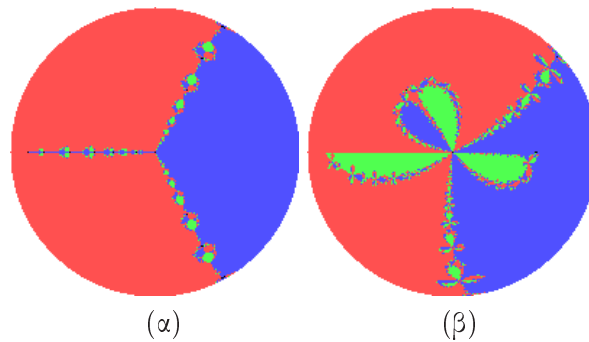
πάνω στη σφαίρα Riemann (βλ. [62]). Με αυτήν την προβολή το αποτέλεσμα είναι εκπληκτικότερο και χρησιμότερο απ' ό,τι με τη συνήθη μελέτη στο μιγαδικό επίπεδο.

Η δυναμική κάθε μεθόδου μελετήθηκε στο διευρυμένο μιγαδικό επίπεδο κατά τον ίδιο τρόπο, όπως και στο Κεφάλαιο 4, εκτός του ότι λαμβάνουμε έναν κύκλο αντί τετραγώνου ως πλέγμα των αρχικών μας σημείων. Η προβολή της εικόνας στη σφαίρα Riemann ολοκληρώνεται ύστερα από τρία βασικά βήματα: πρώτον, προβάλλουμε το πλέγμα μας πάνω στη σφαίρα Riemann, δεύτερον, προβάλλουμε τη σφαίρα στο επίπεδο χρησιμοποιώντας τη στερεογραφική προβολή και, τρίτον, εάν πρόκειται για μελέτη στον δυναμικό χώρο, εφαρμόζουμε την Κατασκευή 3 της Ενότητας 7.2, ενώ εάν πρόκειται για μελέτη στον παραμετρικό χώρο, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο που περιγράφεται στην Κατασκευή 1 της Ενότητας 7.3. Το πρώτο βήμα ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας την *φυσιολογική προβολή* σύμφωνα με το [23] και παρατηρώντας τη σφαίρα από τον νότιο πόλο. Το δεύτερο βήμα χρησιμοποιεί το γεγονός ότι το εσωτερικό του νοτίου ημισφαιρίου απεικονίζεται στο εσωτερικό ενός δίσκου γύρω απ' την αρχή των αξόνων.

Μπορούμε να περιστρέψουμε τη σφαίρα χρησιμοποιώντας τις γωνίες πλάτους *width* και μήκους *length* του προγράμματός μας. Πρώτα γίνεται η περιστροφή κατά y και μετά κατά x . Εμείς παρουσιάζουμε ενδεικτικώς κάποια σχήματα, τα οποία προέρχονται από την εφαρμογή της μεθόδου Schröder για μελέτη του παραμετρικού χώρου. Για τα Σχήματα 7.5–7.9, οι γωνίες είναι, κατά τη διεύθυνση των x , 0° και, κατά τη διεύθυνση των y , -90° .

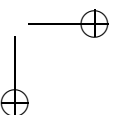
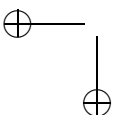
7.4.1 Κυβικά πολυώνυμα

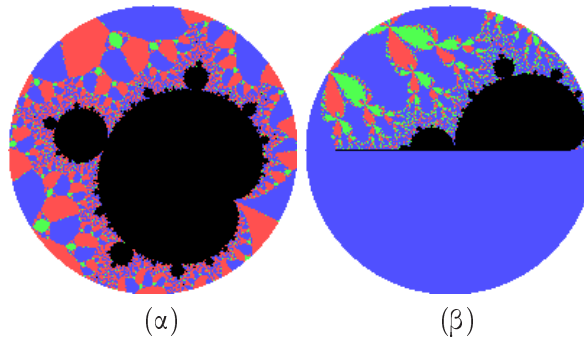
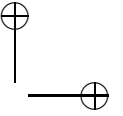
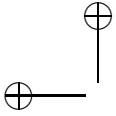
Οι ακόλουθες περιπτώσεις αντιστοιχούν στο Εδάφιο 4.2.6.



Σχήμα 7.5: Επαναληπτική εφαρμογή (α) της S_2 και (β) της S_3 στην οικογένεια των πολυωνύμων p_λ .

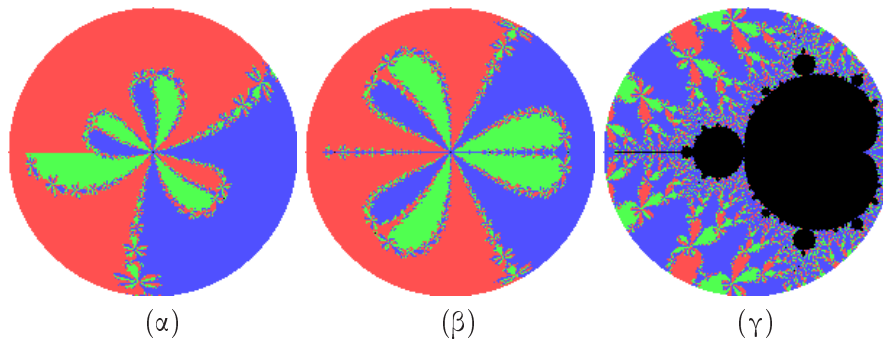
1η περίπτωση, $\sigma = 2$: Το Σχήμα 7.5(α) αναπαριστά περιοχές του παραμετρικού χώρου, για τις οποίες το κρίσιμο σημείο c_1 έλκεται προς τις z_i^* . Το Σχήμα 7.6(α)





Σχήμα 7.6: Μεγεθύνσεις των προηγούμενων σχημάτων αποκαλύπτουν σύνολα Mandelbrot για τις S_2 και S_3 , αντιστοίχως.

αποτελεί μεγέθυνση μιας περιοχής του Σχήματος 7.5(α) ευρισκομένης στη σκοτεινή πλευρά της σφαίρας.



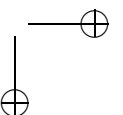
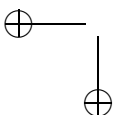
Σχήμα 7.7: (α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της S_4 στην οικογένεια των πολυώνυμων p_λ . (γ) Μεγέθυνση μιας περιοχής του Σχήματος (β) αποκαλύπτει ένα σύνολο Mandelbrot για την S_4 .

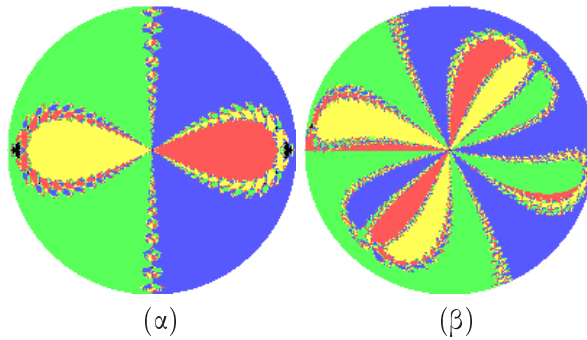
2η περίπτωση, $\sigma = 3$: Το Σχήμα 7.5(β) αναπαριστά περιοχές του παραμετρικού χώρου για τον οποίο το κρίσιμο σημείο c_1 έλκεται προς τις z_i^* . Το Σχήμα 7.6(β) αποτελεί μεγέθυνση μιας περιοχής του Σχήματος 7.5(β).

3η περίπτωση, $\sigma = 4$: Τα Σχήματα 7.7(α) και (β) αναπαριστούν περιοχές του παραμετρικού χώρου για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_3 , αντιστοίχως, έλκονται προς τις z_i^* . Το Σχήμα 7.7(γ) αποτελεί μεγέθυνση μιας περιοχής του Σχήματος 7.7(β) εμφανίζοντας ένα σύνολο τύπου Mandelbrot που σχετίζεται με το c_3 .

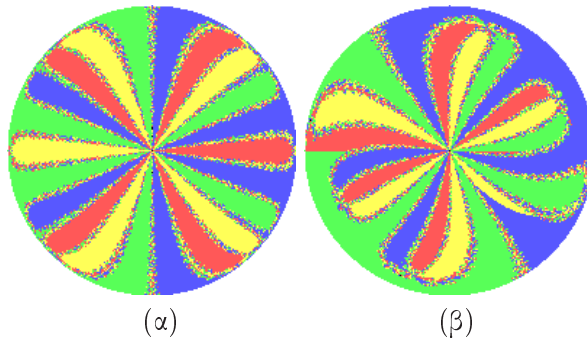
7.4.2 Τεταρτοβάθμια πολυώνυμα

Οι ακόλουθες περιπτώσεις αντιστοιχούν στο Εδάφιο 4.2.8.





Σχήμα 7.8: Επαναληπτική εφαρμογή (α) της S_2 και (β) της S_3 στην οικογένεια των πολυωνύμων q_λ .



Σχήμα 7.9: (α), (β) Επαναληπτική εφαρμογή της S_4 στην οικογένεια των πολυωνύμων q_λ .

1η περίπτωση, $\sigma = 2$: Το Σχήμα 7.8(α) αναπαριστά περιοχές του παραμετρικού χώρου για τις οποίες το κρίσιμο σημείο c_1 έλκεται προς τις z_i^* .

2η περίπτωση, $\sigma = 3$: Το Σχήμα 7.8(β) αναπαριστά περιοχές του παραμετρικού χώρου για τις οποίες το κρίσιμο σημείο c_1 έλκεται προς τις z_i^* .

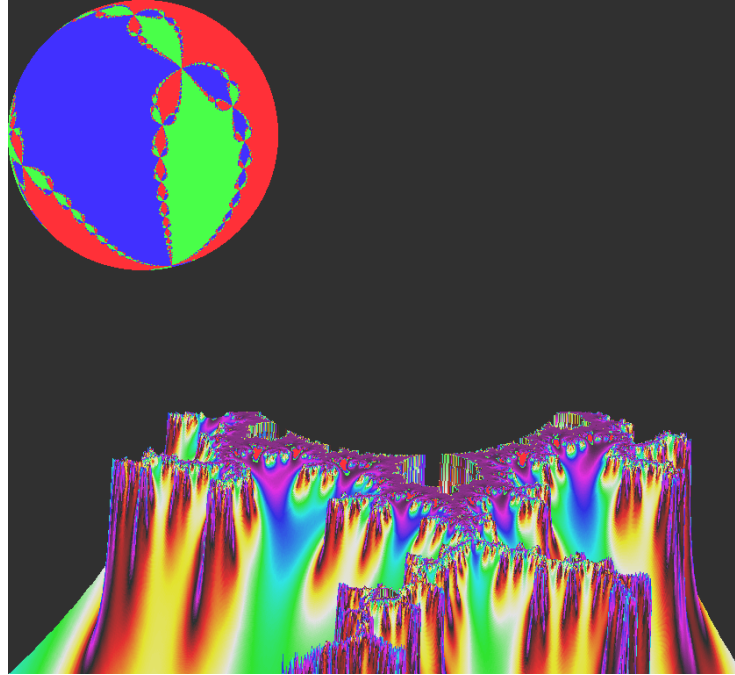
3η περίπτωση, $\sigma = 4$: Τα Σχήματα 7.9(α) και 7.9(β) αναπαριστούν περιοχές του παραμετρικού χώρου για τις οποίες τα κρίσιμα σημεία c_1 και c_3 , αντιστοίχως, έλκονται προς τις z_i^* .

7.5 Συζήτηση

Καμμία μέθοδος δεν είναι ιδανική για κάθε κατάσταση και οι διάφορες μορφές των μεθόδων είναι πολύτιμες για την παραγωγή ενός μεγάλου εύρους εξαιρετικών εικόνων.

Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή των εικόνων που παρου-

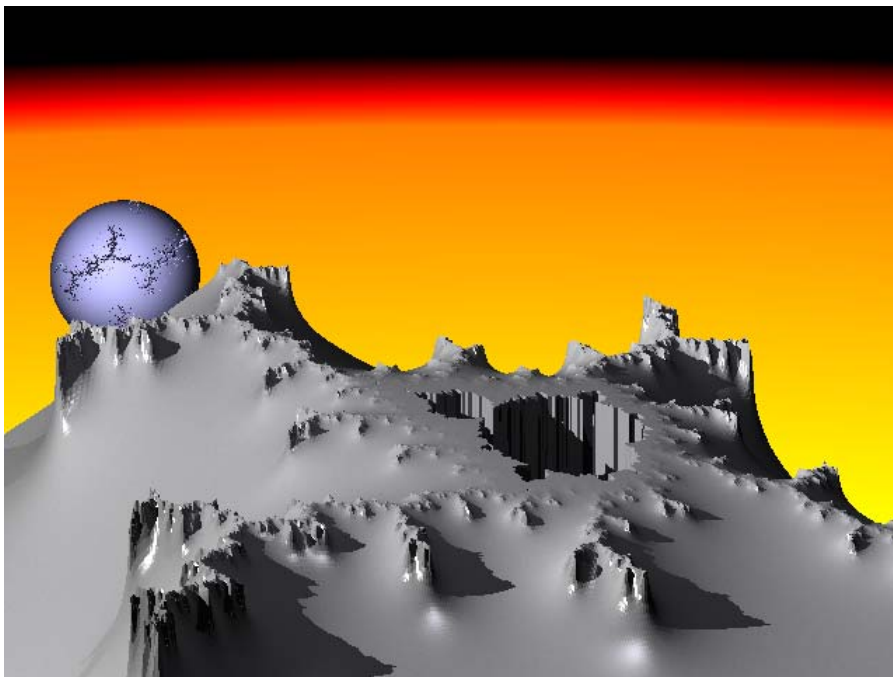
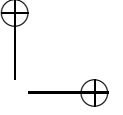
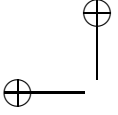
σιάζτηκαν στις Ενότητες 7.2 και 7.3 είναι το FRACTINT, ενώ για τα Σχήματα 7.10 και 7.11 χρησιμοποιήθηκε επιπροσθέτως το POVRAY. Περισσότερες πληροφορίες



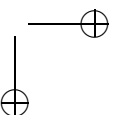
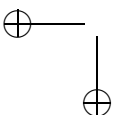
Σχήμα 7.10: Ένα μορφοκλασματικό τοπίο.

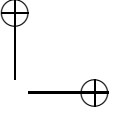
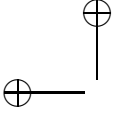
ως προς την χρήση τους υπάρχουν στα [160] και [159], αντιστοίχως. Ένα επίσης πολύ ενδιαφέρον πρόγραμμα, το FRACTAL VISION, μπορεί να βρει κανείς στο [122]. Άλλα ενδιαφέροντα βιβλία που αναφέρονται στη σχέση γραφικών μεθόδων με μορφοκλασματικά σύνολα είναι τα [22], [110], [147], [148], [127], [128], [158], [149], [135], [65] και [74]. Στη συνέχεια παραθέτουμε μόνο τις διάφορες παραμέτρους του FRACTINT που αλλάξαμε, ώστε να έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Στην επιλογή *Select Fractal Type* επιλέγουμε *julia* ή *mandel* για την κατασκευή ενός Julia ή Mandelbrot συνόλου, αντιστοίχως, με οποιαδήποτε από τις προαναφερθείσες μεθόδους, εκτός από την TMAE οπότε επιλέγουμε *julia_inverse*. Στην επιλογή *View Window Options* το *Preview display* ήταν «yes» και στην επιλογή *Basic Options* το *Maximum Iterations* ήταν «1000», ενώ το *Inside Color* ήταν «0» για όλες τις εικόνες, εκτός των ΜΣΔ/J και ΜΣΔ/M που ήταν «15». Στην επιλογή *Extended Options* το *Potential Max Color* ήταν «255», το *Slope* ήταν «250» και το *Bailout* ήταν «200» για τη ΜΣΔ/J, ενώ το *Slope* ήταν «350» για τη ΜΣΔ/M. Στην επιλογή *Basic Options* το *Outside Color* ήταν «15» και το *Passes* ήταν «1», ενώ στην επιλογή *Extended Options* το *Distance Estimator* ήταν «1» για τη ΜΕΑ.



Σχήμα 7.11: Ένα μορφοκλασματικό τοπίο.





Παράρτημα Α'

Κυβικές και τεταρτοβάθμιες εξισώσεις

Για περισσότερες πληροφορίες επί της θεωρίας των εξισώσεων, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο [153]. Εξισώσεις πέμπτου βαθμού μελετώνται στην [56].

Α'.1 Επίλυση κυβικών εξισώσεων

Α'.1.1 Τύποι του Cardan

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η γενική κυβική εξίσωση είναι της μορφής

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (\text{A'.1})$$

αφού η διαίρεση με τον συντελεστή του x^3 δεν τροποποιεί τις ρίζες της εξίσωσης.

Εισάγοντας έναν καινούργιο άγνωστο, η εξίσωση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί έτσι, ώστε να μην περιέχει τη δεύτερη δύναμη του αγνώστου. Θέτουμε $x = y + v$ και επιλέγουμε το v έτσι, ώστε η προκύπτουσα κυβική εξίσωση να στερείται τον όρο y^2 . Βρίσκουμε τότε ότι $x = y - a/3$, οπότε η προτεινόμενη εξίσωση μετασχηματίζεται στην

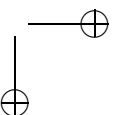
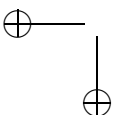
$$y^3 + py + q = 0, \quad (\text{A'.2})$$

όπου

$$p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = c - \frac{ba}{3} + \frac{2a^3}{27}.$$

Αναζητούμε ικανοποίηση της (A'.2) θέτοντας

$$y = u + v,$$



δηλ. εισάγουμε δύο αγνώστους u και v . Αντικαθιστώντας αυτήν την έκφραση στην (Α'.2) και τροποποιώντας καταλλήλως τους όρους, τα u και v πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση

$$u^3 + v^3 + (p + 3uv)(u + v) + q = 0 \quad (\text{Α'.3})$$

με δύο αγνώστους. Το πρόβλημα αυτό είναι ακαθόριστο, εκτός εάν δοθεί και κάποια άλλη σχέση μεταξύ των u και v . Γί αυτό θέτουμε

$$3uv + p = 0$$

ή

$$uv = -\frac{p}{3}.$$

Τότε, από την (Α'.3), έπεται ότι

$$u^3 + v^3 = -q,$$

έτσι ώστε η λύση της κυβικής (Α'.2) λαμβάνεται επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων

$$u^3 + v^3 = -q \quad uv = -\frac{p}{3}.$$

Τελικώς, αν $Q = p/3$, $R = -q/2$ και $\Delta = R^2 + Q^3$, τότε η Εξ. (Α'.2) έχει τις ακόλουθες ρίζες

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{R + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{R + \sqrt{\Delta}} - \frac{Q}{\sqrt[3]{R + \sqrt{\Delta}}}, \\ y_2 &= \omega \sqrt[3]{R + \sqrt{\Delta}} + \omega^2 \sqrt[3]{R - \sqrt{\Delta}}, \\ y_3 &= \omega^2 \sqrt[3]{R + \sqrt{\Delta}} + \omega \sqrt[3]{R - \sqrt{\Delta}}, \end{aligned}$$

όπου

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

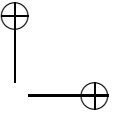
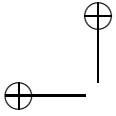
Α'.1.2 Τριγωνομετρική επίλυση

Είναι δυνατόν να παρουσιάσουμε τις ρίζες σε μια μορφή κατάλληλη για αριθμητικούς υπολογισμούς, εξάγοντας την κυβική ρίζα του

$$A = R + i\sqrt{-\Delta}$$

τριγωνομετρικώς. Το τετράγωνο της απόλυτης τιμής του A είναι

$$\rho^2 = \left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \frac{p^3}{27} = \left(\frac{-p}{3}\right)^3,$$



οπότε

$$\rho = \left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} = \frac{-p\sqrt{-p}}{\sqrt{27}}.$$

Το όρισμα του A μπορεί να καθορισθεί είτε από το συνημίτονό του

$$\cos(\phi) = \frac{\sqrt{27}q}{2p\sqrt{-p}}$$

είτε από την εφαπτομένη του

$$\tan(\phi) = \frac{-\sqrt{-\Delta}}{q\sqrt{27}}$$

υπό την προϋπόθεση ότι η ϕ θεωρείται στο πρώτο ή δεύτερο τεταρτημόριο σύμφωνα με το αν το q είναι αρνητικό ή θετικό. Τελικώς, οι ρίζες δίνονται από τις

$$y_k = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\phi + 2\pi(k-1)}{3}\right), \quad k = 1, 2, 3, \quad (\text{A'.4})$$

όπου $\cos(\phi) = R\sqrt{-Q^3}$.

A'.2 Επίλυση τεταρτοβαθμίων εξισώσεων

A'.2.1 Επίλυση κατά Descartes–Euler

Η τεταρτοβάθμια εξίσωση

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (\text{A'.5})$$

μετασχηματίζεται στην ανηγμένη μορφή

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \quad (\text{A'.6})$$

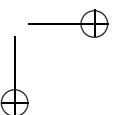
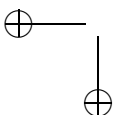
μέσω της αντικατάστασης $x = y - a/4$, όπου $p = (8b - 3a^2)/8$, $q = (8c - 4ab + a^3)/8$ και $r = (4^4d - 4^3ac + 4^2ba^2 - 3a^4)/4^4$. Οι λύσεις της ανηγμένης τεταρτοβάθμιας εξίσωσης είναι εκείνες των δύο δευτεροβαθμίων

$$y^2 - Ay + u/2 + B = 0 \text{ και } y^2 + Ay + u/2 - B = 0, \quad (\text{A'.7})$$

όπου $A = \sqrt{u - p}$, $B = q/(2A)$ για $A \neq 0$ και u είναι μια οιαδήποτε λύση της

$$u^3 - pu^2 - 4ru + 4pr - q^2 = 0,$$

η οποία είναι της μορφής (A'.1).



A'.2.2 Επίλυση κατά Ferrari

Γράψτε την Εξ. (A'.5) στη μορφή

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$$

και προσθέστε $a^2/4x^2$ και στις δύο πλευρές· τότε η

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d \quad (\text{A'.8})$$

είναι μια εξίσωση ισοδύναμη με την αρχική εξίσωση. Αν το δεξί σκέλος της (A'.8) ήταν τέλειο τετράγωνο, η επίλυση αυτής της εξίσωσης θα ήταν άμεση. Αλλά γενικώς δε συμβαίνει αυτό. Η βασική ιδέα της μεθόδου του Ferrari συνίσταται από την πρόσθεση και στις δύο πλευρές της (A'.8) της

$$y\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right) + \frac{y^2}{4}$$

έτσι, ώστε να έχουμε τέλειο τετράγωνο στο αριστερό σκέλος για κάποιο ακαθόριστο y . Η Εξ. (A'.8) μετασχηματίζεται τότε στην

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(-c + \frac{1}{2}ay\right)x + \left(-d + \frac{1}{4}y^2\right). \quad (\text{A'.9})$$

Τώρα αναζητούμε να καθορίσουμε το y έτσι, ώστε η

$$\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(-c + \frac{1}{2}ay\right)x + \left(-d + \frac{1}{4}y^2\right)$$

να γίνει το τετράγωνο μιας γραμμικής έκφρασης $ex + f$.

Γενικώς, αν

$$Ax^2 + Bx + C = (ex + f)^2, \quad (\text{A'.10})$$

τότε

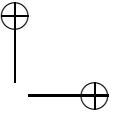
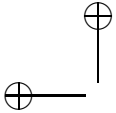
$$B^2 - 4AC = 0 \quad (\text{A'.11})$$

και αντιστρόφως. Στην πραγματικότητα, η Εξ. (A'.10) είναι ισοδύναμη με τις τρεις σχέσεις

$$A = e^2, \quad B = 2ef, \quad C = f^2 \quad (\text{A'.12})$$

έτσι, ώστε να ικανοποιείται η (A'.11). Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (A'.11). Τότε, αν $A = 0$ και $C = 0$, έχουμε επίσης ότι $B = 0$ και οι σχέσεις (A'.12) θα ισχύουν για $e = f = 0$. Αν οι A και C δεν είναι ταυτοχρόνως μηδέν, έστω, για παράδειγμα, ότι $A \neq 0$. Τότε παίρνουμε

$$e = \sqrt{A}, \quad f = \frac{B}{2e}$$



και, δυνάμει της (Α'.11), θα έχουμε ότι

$$C = f^2.$$

Άρα, το δεξί σκέλος της (Α'.9) θα είναι το τετράγωνο μιας γραμμικής έκφρασης $ex + f$ αν το y ικανοποιεί την εξίσωση

$$\left(\frac{1}{2}ay - c\right)^2 = 4\left(y + \frac{a^2}{4} - b\right) + \left(\frac{1}{4}y^2 - d\right)$$

ή, σε ανεπτυγμένη μορφή,

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0.$$

Απομένει να πάρουμε για y οιαδήποτε ρίζα αυτής της εξίσωσης, η οποία καλείται επιλύουσα της διτετράγωνης εξίσωσης, ώστε να έχουμε

$$\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}ay - c\right)x + \left(\frac{1}{4}y^2 - d\right) = (ex + f)^2$$

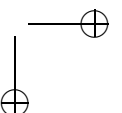
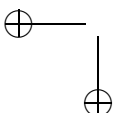
με καταλλήλως επιλεγμένα e και f . Η διτετράγωνη εξίσωση εμφανίζεται τότε στη μορφή

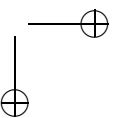
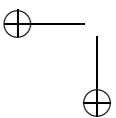
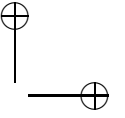
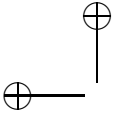
$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 = (ex + f)^2$$

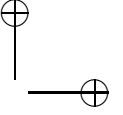
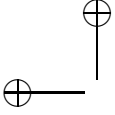
και διασπάται στις δύο δευτεροβάθμιες εξισώσεις

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}y = ex + f \text{ και } x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}y = -ex - f,$$

οι οποίες, αν επιλυθούν κατά σειρά, δίνουν τις τέσσερις απαιτούμενες ρίζες.

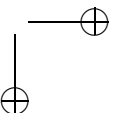
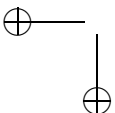


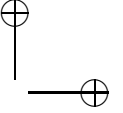
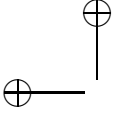




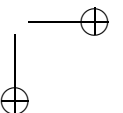
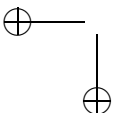
Βιβλιογραφία

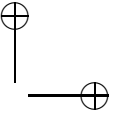
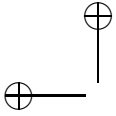
- [1] Aarts J. M. and Oversteegen L. G., *The geometry of Julia sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), 897–918.
- [2] Ahlfors L. V., *Complex analysis*, 3rd ed., McGraw–Hill, New York, 1979.
- [3] Ali M. and Clarkson T. G., *Using linear fractal interpolation functions to compress video images*, Fractals **2** (1994), 417–421.
- [4] Apostol T. M., *Mathematical analysis*, 2nd ed., Addison–Wesley, Massachusetts, 1974.
- [5] Argyropoulos N., Böhm A. and Drakopoulos V., *Julia and Mandelbrot-like sets for higher order König rational iteration functions*, in Novak M. M. and Dewey T. G. (eds), *Fractal frontiers*, World Scientific, Singapore, 1997, 169–178.
- [6] Baker I. N., *The existence of fixpoints of entire functions*, Math. Zeitschr. **73** (1960), 280–284.
- [7] Baker I. N., *Permutable entire functions*, Math. Zeitschr. **79** (1962), 243–249.
- [8] Baker I. N., *Repulsive fixpoints of entire functions*, Math. Zeitschr. **104** (1968), 252–256.
- [9] Baker I. N., *An entire function which has wandering domains*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **22** (1976), 173–176.
- [10] Baker I. N., *The iteration of polynomials and transcendental entire functions*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **30** (1981), 483–495.
- [11] Baker I. N., *Wandering domains in the iteration of entire functions*, Proc. London Math. Soc. **49** (1984), 563–576.



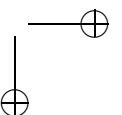
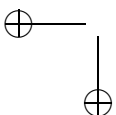


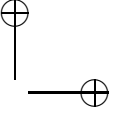
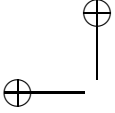
- [12] Bandt C., Graf S. and Zähle M. (eds), *Fractal geometry and stochastics*, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [13] Baribeau L. and Ransford T. J., *Meromorphic multifunctions in complex dynamics*, Ergodic Theory Dynam. Systems **12** (1992), 39–52.
- [14] Barnsley M. F., *Fractal functions and interpolation*, Constr. Approx. **2** (1986), 303–329.
- [15] Barnsley M. F., *Fractals everywhere*, 2nd ed., Academic Press Professional, San Diego, CA, 1993.
- [16] Barnsley M. F. and Demko S., *Iterated function systems and the global construction of fractals*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **399** (1985), 243–275.
- [17] Barnsley M. F. and Demko S., *Chaotic dynamics and fractals*, Academic Press, San Diego, CA, 1986.
- [18] Barnsley M. F. and Elton J. H., *A new class of Markov processes for image encoding*, Adv. in Appl. Probab. **20** (1988), 14–32.
- [19] Barnsley M. F., Elton J. H., Hardin D. and Massopust P., *Hidden variable fractal interpolation functions*, SIAM J. Math. Anal. **20** (1989), 1218–1242.
- [20] Barnsley M. F. and Hurd L. P., *Fractal image compression*, AK Peters, Wellesley, 1992.
- [21] Beardon A. F., *Iteration of rational functions*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [22] Beck U., *Computer-Graphik: Bilder und Programme zu Fraktalen, Chaos und Selbstähnlichkeit*, Birkhäuser, Basel and Boston, 1987.
- [23] Becker K.-H. and Dörfler M., *Dynamische Systeme und Fraktale: Computergrafische Experimente mit Pascal*, 3. Auflage, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.
- [24] Blanchard P., *Complex analytic dynamics on the Riemann sphere*, Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1984), 85–141.
- [25] Bountis T., *Fundamental concepts of classical chaos I*, Open Sys. & Information Dyn. **3** (1995), 23–95.
- [26] Bountis T., *Fundamental concepts of classical chaos. Part II: Fractals and Chaotic Dynamics*, Open Sys. & Information Dyn. **4** (1997), 281–322.



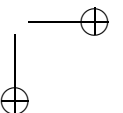
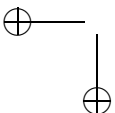


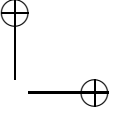
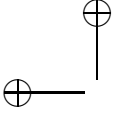
- [27] Branner B. and Hubbard J. H., *The iteration of cubic polynomials-Part I: The global topology of parameter space*, Acta Math. **160** (1988), 143–206.
- [28] Branner B. and Hubbard J. H., *The iteration of cubic polynomials-Part II: Patterns and parapatterns*, Acta Math. **169** (1992), 229–325.
- [29] Brolin H., *Invariant sets under iteration of rational functions*, Ark. Mat. **6** (1965), 103–144.
- [30] Bunde A. and Havlin S. (eds), *Fractals in science*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1994.
- [31] Cabrelli C. A., Forte B., Molter U. M. and Vrscay E. R., *Iterated fuzzy set systems: A new approach to the inverse problem for fractals and other sets*, J. Math. Anal. Appl. **171** (1992), 79–100.
- [32] Carleson L. and Gamelin T., *Complex dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [33] Cherbit G. (ed.), *Fractals, non-integral dimensions and applications*, Wiley, Chichester, 1991.
- [34] Chuang C.-T., *Normal families of meromorphic functions*, World Scientific, Singapore, 1993.
- [35] Collet P. and Eckmann J.-P., *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [36] Conway J. B., *Functions of one complex variable*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1978.
- [37] Coornaert M. and Papadopoulos A., *Symbolic dynamics and hyperbolic groups*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1993.
- [38] Crandall R. E., *Projects in scientific computation*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [39] Cremer H., *Über die Iteration rationaler Funktionen*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **33** (1925), 185–210.
- [40] Crilly A. J., Earnshaw R. A. and Jones H. (eds), *Fractals and chaos*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [41] Crilly A. J., Earnshaw R. A. and Jones H. (eds), *Applications of fractals and chaos*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1993.



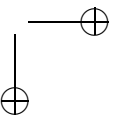
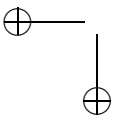


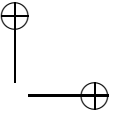
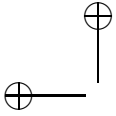
- [42] Crownover R. M., *Introduction to fractals and chaos*, Jones and Bartlett, Boston, 1995.
- [43] Curry J. H., Garnett L. and Sullivan D. R., *On the iteration of a rational function: Computer experiments with Newton's method*, *Comm. Math. Phys.* **91** (1983), 267–277.
- [44] Cvitanović P., *Universality in chaos*, 2nd ed., IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 1989.
- [45] Dalla L. and Drakopoulos V., *On the parameter identification problem in the plane and the polar fractal interpolation functions*, *J. Approx. Theory.* **101** (1999), 290–303.
- [46] Demko S., Hodges L. and Naylor B., *Construction of fractal objects with iterated function systems*, *Comput. Graph.* **19** (3) (1985), 271–278.
- [47] Devaney R. L., *Julia sets and bifurcation diagrams for exponential maps*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **11** (1984), 167–171.
- [48] Devaney R. L., *Bursts into chaos*, *Phys. Rev. Lett.* **104** (1984), 385–387.
- [49] Devaney R. L. (ed), *Complex dynamical systems: The mathematics behind the Mandelbrot and Julia sets*, AMS, Providence, RI, 1994.
- [50] Devaney R. L., *The fractal geometry of the Mandelbrot set; 2. How to count and how to add*, *Fractals* **3** (1995), 629–640.
- [51] Devaney R. L., *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed., Addison–Wesley, Reading, MA, 1989.
- [52] Devaney R. L. and Keen L. (eds), *Chaos and fractals: The mathematics behind the computer graphics*, AMS, Providence, RI, 1989.
- [53] Devaney R. L. and Krych M., *Dynamics of $\exp(z)$* , *Ergodic Theory Dynam. Systems* **4** (1984), 35–52.
- [54] Douady A. and Hubbard J. H., *Itération des polynômes quadratiques complexes*, *C. R. Acad. Sc. Paris* **294** (1982), 123–126.
- [55] Douady A. and Hubbard J. H., *On the dynamics of polynomial-like mappings*, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **18** (1985), 287–343.
- [56] Doyle P. and McMullen C., *Solving the quintic by iteration*, *Acta Math.* **163** (1989), 151–180.



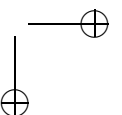
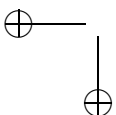


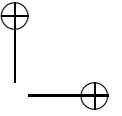
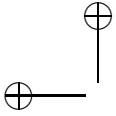
- [57] Drakopoulos V., *On the additional fixed points of Schröder iteration functions associated with a one-parameter family of cubic polynomials*, Comput. & Graphics **22** (1998), 629–634.
- [58] Drakopoulos V., *Schröder iteration functions associated with a one-parameter family of biquadratic polynomials*, Chaos, Solitons & Fractals **13** (2002), 233–243.
- [59] Drakopoulos V., Argyropoulos N. and Böhm A. *Generalized computation of Schröder iteration functions to motivate families of Julia and Mandelbrot-like sets*, SIAM J. Numer. Anal. **36** (1999), 417–435.
- [60] Drakopoulos V. and Böhm A., *Basins of attraction and Julia sets of Schröder iteration functions*, in Bountis T. and Pnevmatikos Sp. (eds), *Order and chaos in nonlinear dynamic systems*, Vol. IV, Pnevmatikos, Athens, 1998, 157–163.
- [61] Drakopoulos V. and Dalla L., *Space-filling curves generated by fractal interpolation functions*, in Iliev O., Kaschiev M., Margenov S., Sendov Bl. and Vassilevski P. (eds), *Recent advances in numerical methods and applications*, World Scientific, Singapore, 1999, 784–792.
- [62] Drakopoulos V. and Georgiou S., *Visualization on the Riemann sphere of Schröder iteration functions associated and their efficient computation*, in Mastorakis N. E. (ed), *Modern applied mathematics techniques in Circuits, Systems and Control*, World Scientific Engineering Society, New York and Athens, 1999, 131–137.
- [63] Drakopoulos V., Tziouvaras A., Böhm A. and Dalla L., *Fractal interpolation techniques for the generation of space-filling curves*, in Lipitakis E. A. (ed), *Hellenic European Research on Computer Mathematics and its Applications*, LEA, Athens, 1999, 843–850.
- [64] Edgar G. A., *Measure, topology and fractal geometry*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [65] Encarnação J. L., Peitgen H.-O., Sakas G. and Englert G. (eds), *Fractal geometry and computer graphics*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1992.
- [66] Eremenko A. E. and Ljubich M. Ju., *Examples of entire functions with pathological dynamics*, J. London Math. Soc. **36** (1987), 458–468.
- [67] Falconer K. J., *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*, Wiley, Chichester, 1990.



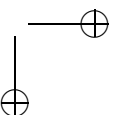
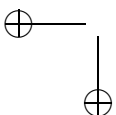


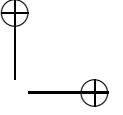
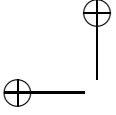
- [68] Falconer K. J., *Techniques in fractal geometry*, Wiley, Chichester, 1997.
- [69] Fatou M. P., *Sur les équations fonctionnelles*, Bull. Soc. Math. France **47** (1919), 161–271.
- [70] Fatou M. P., *Sur les équations fonctionnelles*, Bull. Soc. Math. France **48** (1920), 33–94, 208–314.
- [71] Fatou M. P., *Sur l'itération des fonctions transcendentes entières*, Acta Math. **47** (1926), 337–370.
- [72] Feder J., *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988.
- [73] Fernau H., *Iterierte Funktionen, Sprachen und Fraktale*, BI, Mannheim, 1994.
- [74] Finlay M. and Blanton K. A., *Real-world fractals*, M&T Books, New York, 1993.
- [75] Fischer P. and Smith W. R., *Chaos, fractals and dynamics*, Marcel Dekker, New York, 1985.
- [76] Fisher Y., *Fractal image compression*, Fractals **2** (1994), 347–361.
- [77] Fisher Y., *Fractal image compression*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [78] Flexor M. and Sentenac P., *Algorithmes de Newton généralisés*, C. R. Acad. Sc. Paris **308** (1989), 445–448.
- [79] Forte B. and Vrscay E. R., *Solving the inverse problem for function and image approximation using iterated function systems. I. Theoretical basis. II. Algorithm and computations*, Fractals **2** (1994), 325–346.
- [80] Frame M. and Angers M., *Some nonlinear iterated function systems*, Comput. & Graphics **18** (1994), 119–125.
- [81] Frame M. and Robertson J., *A generalized Mandelbrot set and the role of critical points*, Comput. & Graphics **16** (1992), 35–40.
- [82] Glasner E. and Weiss B., *Sensitive dependence on initial conditions*, Nonlinearity **6** (1993), 1067–1075.
- [83] Gröller E., *Modeling and rendering of nonlinear iterated function systems*, Comput. & Graphics **18** (1994), 739–748.
- [84] Guckenheimer J. and Holmes P., *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.



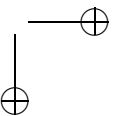
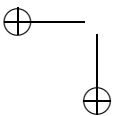


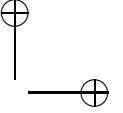
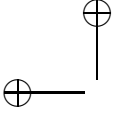
- [85] Gutiérrez J. M., Iglesias A. and Rodríguez M. A., *A multifractal analysis of IFSP invariant measures with application to fractal image generation*, *Fractals* **4** (1996), 17–27.
- [86] Hao B.-L. (ed), *Chaos II*, World Scientific, Singapore, 1990.
- [87] Henrici P., *Applied and computational complex analysis*, Vol. 1, Wiley, New York, 1974.
- [88] Hildebrand F. B., *Introduction to numerical analysis*, 2nd ed., McGraw–Hill, New York, 1974.
- [89] Hirsch M. W. and Smale S., *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
- [90] Hoggar S. G., *Mathematics for computer graphics*, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1992.
- [91] Householder A. S., *Principles of numerical analysis*, McGraw–Hill, New York, 1953.
- [92] Householder A. S., *The numerical treatment of a single nonlinear equation*, McGraw–Hill, New York, 1970.
- [93] Howland J. L. and Vaillancourt R., *Attractive cycles in the iteration of meromorphic functions*, *Numer. Math.* **46** (1985), 323–337.
- [94] Hurley M. and Martin C., *Newton’s algorithm and chaotic dynamical systems*, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 238–252.
- [95] Hutchinson J. E., *Fractals and self similarity*, *Indiana Univ. Math. J.* **30** (1981), 713–747.
- [96] Julia G., *Mémoire sur l’itération des fonctions rationnelles*, *J. Math. Pures Appl.* **8** (1918), 47–245.
- [97] Kaandorp J. A., *Fractal modelling: Growth and form in biology*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1994.
- [98] Kahan W., *Laguerre’s method and a circle which contains at least one zero of a polynomial*, *SIAM J. Numer. Anal.* **4** (1967), 474–482.
- [99] Kisaka M., *Local uniform convergence and convergence of Julia sets*, *Nonlinearity* **8** (1995), 273–281.



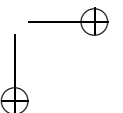
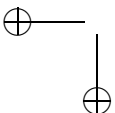


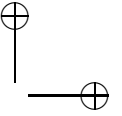
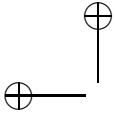
- [100] König J., *Über eine Eigenschaft der Potenzreihen*, Math. Ann. **23** (1884), 447–449.
- [101] Lauwerier H., *Fractals: Endlessly repeated geometrical figures*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1991.
- [102] Lei T., *Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets*, Comm. Math. Phys. **134** (1990), 587–617.
- [103] Lei T., Cubic Newton's method of Thurston's type. Preprint.
- [104] Lu N., *Fractal imaging*, Academic Press, San Diego, CA, 1997.
- [105] Luenberger D. G., *Linear and nonlinear programming*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1984.
- [106] Mandelbrot B. B., *Fractals: Form, chance and dimension*, W. H. Freeman, San Francisco, CA, 1977.
- [107] Mandelbrot B. B., *Fractal aspects of the iteration of $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$ for complex λ and z* , Ann. N. Y. Acad. Sci. **357** (1980), 249–259.
- [108] Mandelbrot B. B., *The Fractal geometry of nature*, W. H. Freeman, New York, 1982.
- [109] Mañé R., *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [110] Maréchal G. (ed.), *Eurographics '87*, North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [111] Massopust P. R., *Vector-valued fractal interpolation functions and their box dimension*, Aequ. Math. **42** (1991), 1–22.
- [112] Massopust P. R., *Fractal functions, fractal surfaces and wavelets*, Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [113] Mazel D. S. and Hayes M. H., *Using iterated function systems to model discrete sequences*, IEEE Trans. Signal Process. **40** (1992), 1724–1734.
- [114] Mc Mullen C., *Complex dynamics and renormalization*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1994.
- [115] Milnor J., *On the concept of attractor*, Comm. Math. Phys. **99** (1985), 177–195.
- [116] Misiurewicz M., *On iterates of e^z* , Ergodic Theory Dynam. Systems **1** (1981), 103–106.



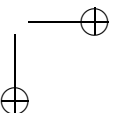
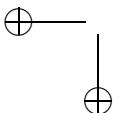


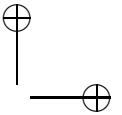
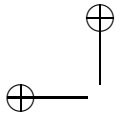
- [117] Mukherjea A. and Pothoven K., *Real and functional analysis*, Plenum Press, New York, 1984.
- [118] Nicolis J. S., *Dynamics and hierarchical systems: An evolutionary approach*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [119] Nicolis J. S., *Chaos and information processing*, World Scientific, Singapore, 1991.
- [120] Nonnenmacher T. F., Losa G. A. and Weibel E. R. (eds), *Fractals in biology and medicine*, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [121] Novak M. M. (ed), *Fractal reviews in the natural and applied sciences*, Chapman & Hall, London, 1995.
- [122] Oliver D. and Hoviss D., *Fractal graphics for windows*, Sams Publishing, Indianapolis, 1994.
- [123] Ott E., *Chaos in dynamical systems*, Cambridge Univ. Press, New York, 1993.
- [124] Parlett B., *Laguerre's method applied to the matrix eigenvalue problem*, Math. Comp. **18** (1964), 464–485.
- [125] Peitgen H.–O. (ed), *Newton's method and dynamical systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
- [126] Peitgen H.–O., Henriques J. M. and Penedo L. F. (eds), *Fractals in the fundamental and applied sciences*, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [127] Peitgen H.–O., Jürgens H. and Saupe D., *Fractals for the classroom*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [128] Peitgen H.–O., Jürgens H. and Saupe D., *Chaos and fractals: New frontiers of science*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [129] Peitgen H.–O. and Richter P. H., *The beauty of fractals*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [130] Peitgen H.–O. and Saupe D. (eds), *The science of fractal images*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [131] Peitgen H.–O., Saupe D. and Haeseler F. v., *Cayley's problem and Julia sets*, Math. Intelligencer **6** (1984), 11–20.



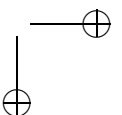
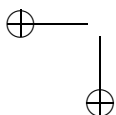


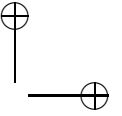
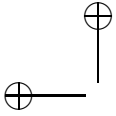
- [132] Pickover C. A., *Chaotic fragmentation in Halley's Paradise*, Phys. Scripta **39** (1989), 193–195.
- [133] Pickover C. A. (ed), *The pattern book: Fractals, art and nature*, World Scientific, Singapore, 1995.
- [134] Pickover C. A. (ed), *Fractal horizons: The future use of fractals*, St. Martin's Press, New York, 1996.
- [135] Pickover C. A. (ed), *Chaos and fractals: A computer graphical journey*, Elsevier Science Publishers B. V., Netherlands, 1998.
- [136] Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A. and Vetterling W. T., *Numerical recipes: The art of scientific computing*, Cambridge Univ. Press, New York, 1986.
- [137] Prusinkiewicz P. and Hanan J., *Lindenmayer systems, fractals and plants*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [138] Prusinkiewicz P. and Lindenmayer A., *The algorithmic beauty of plants*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [139] Reeves R., *Further insights into Halley's method*, Comput. & Graphics **16** (1992), 235–236.
- [140] Rudin W., *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw–Hill, Singapore, 1986.
- [141] Sagan H., *Space-filling curves*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [142] Schiff J. L., *Normal families*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [143] Shiah A., Ong K.–K. and Musielak Z. E., *Fractal images of generalized Mandelbrot sets*, Fractals **2** (1994), 111–121.
- [144] Smyth W. F., *The construction of rational iterating functions*, Math. Comp. **32** (1978), 811–827.
- [145] Steinmetz N., *Rational iteration*, de Gruyter, Berlin, 1993.
- [146] Steeb W.–H., *Chaos and fractals*, BI, Mannheim, 1992.
- [147] Stevens R. T., *Advanced fractal programming in C*, M&T Books, New York, 1990.
- [148] Stevens R. T., *Fractal programming in Turbo Pascal*, M&T Books, Redwood City, CA, 1990.



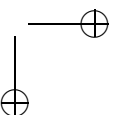
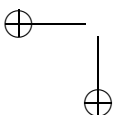


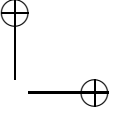
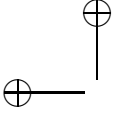
- [149] Stevens R. T., *Fractal programming and ray tracing with C++*, M&T Books, San Mateo, CA, 1991.
- [150] Stevens R. T., *Understanding self-similar fractals*, R&D Technical Books, Lawrence, KA, 1995.
- [151] Töpfer H., *Über die Iteration der ganzen transzendenten Funktionen, insbesondere von $\sin z$ und $\cos z$* , Math. Ann. **117** (1939), 65–84.
- [152] Tricot C., *Curves and fractal dimension*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [153] Uspensky J. V., *Theory of equations*, McGraw–Hill, New York, 1948.
- [154] Véhel J. L., Daoudi K. and Lutton E., *Fractal modeling of speech signals*, Fractals **2** (1994), 379–382.
- [155] Véhel J. L., Lutton E. and Tricot C. (eds), *Fractals in engineering*, Springer-Verlag, London, 1997.
- [156] Vrscay E. R., *Julia sets and Mandelbrot-like sets associated with higher order Schröder rational iteration functions: A computer assisted study*, Math. Comp. **46** (1986), 151–169.
- [157] Vrscay E. R. and Gilbert W. J., *Extraneous fixed points, basin boundaries and chaotic dynamics for Schröder and König rational iteration functions*, Numer. Math. **52** (1988), 1–16.
- [158] Watkins C. D. and Sharp L., *Programming in 3 dimensions*, M&T Publishing, San Mateo, CA, 1992.
- [159] Wegner T., *Image lab*, Waite Group Press, Corte Madera, CA, 1992.
- [160] Wegner T. and Tyler B., *Fractal creations*, 2nd ed., Waite Group Press, Corte Madera, CA, 1993.
- [161] Wicks K. R., *Fractals and hyperspaces*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1991.
- [162] Yamaguti M., Hata M. and Kigami J., *Mathematics of fractals*, AMS, Providence, RI, 1997.
- [163] Δάλλα Λ., Δρακόπουλος Β. και Μπερ Α., *Στοιχεία από τη θεωρία των fractals*, Μαθηματική Επιθεώρηση **43** (1995), 21–48.
- [164] Δρακόπουλος Β., *Εισαγωγή στα πολυσχιδή και τη χαοτική δυναμική*, Μεταπτυχιακή Διατριβή, Παν. Αθηνών, 1992.





- [165] Δρακόπουλος Β. και Ευαγγελάτου-Δάλλα Λ., *Η νέα διάσταση της εκπαιδευτικής μαθηματικής σκέψης*, 14ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, ΕΜΕ, 1997, 235–242.
- [166] Δρακόπουλος Β. και Μπεμ Α., *Η γεωμετρία της φύσης στην εκπαίδευση*, Πρακτικά εισηγήσεων Διημερίδας Πληροφορικής «Η Πληροφορική στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση», ΕΠΥ, 1997, 117–124.
- [167] Μπούντης Α. Χ., *Δυναμικά συστήματα και χάος*, Τόμοι Α' και Β', Εκδ. Βούλγαρη, Πάτρα, 1989.
- [168] Μπούντης Α. Χ. και Καρατζόγλου-Ζαφειροπούλου Ο., *Τα μαθηματικά των μη γραμμικών φαινομένων και του χάους*, Αστρολάβος **3** (1997), 28–44.
- [169] Νεγρεπόντης Σ. Α., *Θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων*, Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα, 1985.
- [170] Briggs J. and Peat F. D., *Ο ταραγμένος καθρέφτης*, Εκδ. Κάτοπτρο, Αθήνα, 1991.
- [171] Gleick J., *Χάος - Μια νέα επιστήμη*, Εκδ. Κάτοπτρο, Αθήνα, 1990.
- [172] Ruelle D., *Τύχη και Χάος*, Εκδ. Κωσταράκη, Αθήνα, 1994.
- [173] Stewart I., *Παίζει ο Θεός ζάρια*, Εκδ. Κωσταράκη, Αθήνα, 1991.
- [174] Weyl H., *Συμμετρία*, Εκδ. Τροχαλία, Αθήνα, 1991.





Ευρετήριο

fractals, 5

ακτινικό όριο, 47

ακτινικό τόξο, 47

αλγεβρική επίλυση, 43

αλγόριθμος

αιτιοκρατικών επαναλήψεων, 132

τυχαίων επαναλήψεων, 134

αναλλοίωτο σύνολο

έμπροσθεν, 27

όπισθεν, 27

πλήρως, 27

αναλυτική συναρτήρηση, 10

απεικόνιση

αλληλοεπικάλυψης, 111

σύμμορφη, 13

ασύνδετος χώρος, 10

βαθμός ρητής συνάρτησης, 16

βόρειο ημισφαίριο, 12

βόρειος πόλος, 12

γεμισμένο σύνολο Julia, 37

γενικευμένο σύνολο δεδομένων, 113

γεννήτορας, 131

δακτύλιος Herman, 40

διάσταση

Hausdorff–Besicovitch, 4

επαγωγική, 3

τοπολογική, 3

διευρυμένο μιγαδικό επίπεδο, 11

δίσκος

Siegel, 40

ανοικτός, 9

κλειστός, 9

κυκλικός, 9

δυναμικό σύστημα

διακεκριμένο, 16

ευαίσθητο σε αρχικές συνθήκες, 50

δυναμικό σύστημα, 5, 15

δυναμικός χώρος, 37

ελκυστής, 27

ενάρκτης, 131

εξαιρετικό σημείο, 32

εξαντλούσα ακολουθία συνόλων, 20

επαναλαμβανόμενο σύστημα συναρτήσεων

αναλλοίωτο σύνολό του, 111

ελκυστής του, 111

υπερβολικό, 111

επαναλαμβανόμενο σύστημα συναρτήσεων, 110

επαναληπτική συνάρτηση

Halley, 88, 102

König, 88

Laguerre, 101

Newton–Raphson, 88

Newton, 54

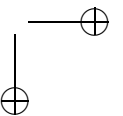
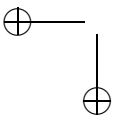
Schröder, 57

επαναληπτική συνάρτηση, 54

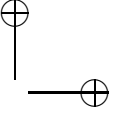
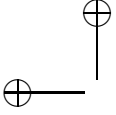
επιλύουσα, 159

επίλυση μέσω ριζικών, 43

ιδιοτιμή περιοδικής τροχιάς, 33



- ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων, 20
- καμπύλη γεμίζουσα τον χώρο, 131
- κρίσιμη τιμή, 42
- κρίσιμο σημείο
ελεύθερο, 42
- κρίσιμο σημείο, 42
- κρυφές μεταβλητές, 123
- κύκλος, 9
- κύκλος συνάρτησης, 16
- κώδικας συγγενούς μετασχηματισμού, 112
- κώδικας του ΕΣΣ, 112
- λεκάνη έλξης
άμεση, 36
- λεκάνη έλξης, 28, 36
- μέθοδος
Chebyshev, 102
Bailey, 102
Lambert, 102
χρόνων διαφυγής, 145
- μερόμορφη συνάρτηση, 11
- μετασχηματισμός
Möbius, 17
αρτοποιού, 50
συγγενής, 112
συντεταγμένων, 126
- μετρική
Hausdorff, 110
χορδική, 13
- μορφοκλάσματα, 5
- μορφοκλασματικές συναρτήσεις, 112
- νότιο ημισφαίριο, 12
- ολικώς ασύνδετος χώρος, 10
- ολόμορφη συνάρτηση, 10
- ομοκλινικό σημείο, 35
- παράγοντας συσταλτικότητας, 110
- παραμετρικός χώρος, 46
- περιοδική τροχιά συνάρτησης, 16
- περιοδικό σημείο
απωστικό, 33
αρρήτως αδιάφορο, 33
ελκυστικό, 33
ρητώς αδιάφορο, 33
υπερελκυστικό, 33
- περιοδικό σημείο, 16
- πολικές συντεταγμένες, 126
- πολλαπλασιαστής, 16
- πόλος συνάρτησης, 11
- προβολή
στερεογραφική, 12
φυσιολογική, 150
- προπεριοδικό σημείο, 34
- πρωτίστη περίοδος, 16
- σταθερά σημεία
πρόσθετα, 62, 89
- σταθερό σημείο, 16
- σύγκλιση
κατά σημείο, 10
ομοιόμορφη, 10
σε συμπαγή υποσύνολα, 13
τοπικώς ομοιόμορφη, 10
- σύγκλισης
τάξη, 53
ταχύτητα, 53
- συνάρτηση
αναμεμειγμένη, 49
με ευαίσθητη εξάρτηση από αρχικές συνθήκες, 49
τοπολογικώς μεταβατική, 49
χαώδης, 50
- συνάρτηση Hölder, 110
- συνάρτηση Lipschitz, 110
- συνάρτηση παρεμβολής
μορφοκλασματική, 112
- συνάρτηση παρεμβολής, 113
- συνάρτηση ρητή, 16
- συναρτησιακή εξίσωση Schröder, 38



- συνεκτική συνιστώσα
 - σημείου, 10
 - συνόλου, 10
- συνεκτικός χώρος, 9
- σύνολο Julia, 24
- σύνολο Mandelbrot
 - μεθόδου König, 98
 - μεθόδου Schröder, 78
- σύνολο Mandelbrot, 46
- σύνολο Fatou, 24
- συστολή, 110
- σφαίρα Riemann, 12
- σχετικώς συμπαγές σύνολο, 21

- τελικώς περιοδικό σημείο, 34
- τοπικώς συνεκτικός
 - σε σημείο, 47
- τοπικώς συνεκτικός, 47
- τοπικώς τελικώς επί, 35
- τοπικώς φραγμένο σύνολο, 15
- τόποι περιστροφής, 40
- τοπολογική συζυγία, 17
- τοπολογικώς συζυγείς, 17
- τόπος, 10
- τροχιά σημείου
 - έμπροσθεν, 15
 - όπισθεν, 16
- τροχιά σημείου, 16
- τύπος του Chebyshev, 57

- υπολογιστική απόδοση, 59

- φυσιολογική οικογένεια συναρτήσεων, 17

